N. RÎBCHIN

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

PENTRU ŞCOALA MEDIE

PRELUCRATĂ
DE V. A. EFREMOV

EDITURA DE STAT A MOLDOVEI
TIRASPOL 1937

GREŞELI DE TIPAR

Inainte de a folosi manualul de faţă, faceţi următoarele îndreptări în text:

Pag.	Rîndul	E tipărit:	Trebue citit:
19	10 de jos	bielei	manivelei
19	9 „ „	manivelei	bielei
38	3 „ „	$S = 45{,}038$	$S = 45038$
41	15 „ „	$2 \sin\left(\frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}\right) = 1$	$2 \sin\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 1$
72	8 de sus	lat	la
84	1 de jos	$360° m$	$360\ m^2$
86	9 „ „	b) $\pm \cos\alpha \ldots$	b) $\pm 2 \cos\alpha \ldots$
92	10 de sus	0,34680	0,31680
114	12 „ „	—	Tabla funcţiilor trigonometrice 77

(*N. Rîbchin*. Culegere de probleme de trigonometrie).

N. RIBCHIN

CULEGERE DE PROBLEME
DE
RIGONOMETRIE

CU UN ADAOS DE PROBLEME
DE GEOMETRIE, CARE SE REZOLVĂ
PRIN APLICAREA TRIGONOMETRIEI

PENTRU CLASELE 8—10
ALE ŞCOLII MEDII

PRELUCRATĂ
DE V. A. EFREMOV

(Redactată după ediţia V rusă, aprobată de Com. Nor.
de Invăţămînt Public al RSFSR)

EDIŢIA II

obată de Com. Nor. de Invăţămînt Public al RASS Moldoveneşti

EDITURA DE STAT A MOLDOVEI
TIRASPOL 1937

PARTEA ÎNTIIA

TRIGONOMETRIA.

§ 1. Măsurarea arcurilor şi unghiurilor.

Generalizarea noţiunilor despre unghi şi arc.

1. Ce unghi descrie în 4 ore orarul ceasornicului? dar minutarul?

2. In 2 secunde, roata unei maşini face 6 învîrtituri. Cu cîte grade se va învîrti roata într'o secundă? dar în 10 secunde?

3. O roată are 72 dinţi. Cu cîte grade se va învîrti acea roată, cînd ea se va învîrti cu 1; 30; 144; 300 dinţi?

4. Să se deseneze poziţia unei raze mobile la un unghi de: $+45°$; $-30°$; $+225°$; $-135°$; $-90°$; $+450°$; $-810°$; $+2070°$. La care unghiuri razele mobile coincid între ele?

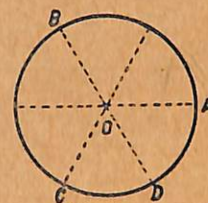


Fig. 1.

5. Să se scrie în grade suma arcurilor: $\smile ABCAB + \smile BAC + \smile CDA$ (fig. 1).

6. Să se scrie formula generală a unghiurilor pentru cazurile cînd raza mobilă ocupă poziţia: 1) OB; 2) OD (fig. 1), şi să se afle cîteva valori parţiale ale acestor unghiuri.

Măsurarea radianală.

7. 1) Raza unui cerc e de 5 cm. Să se calculeze lungimea arcului de 18°.

2) Intr'un cerc de raza R să se afle lungimea arcului de $\alpha°$.

8. 1) Cu ajutorul numărului π să se compună expresii în radiane pentru următoarele arcuri: a) 30°; b) 45°; c) 60°; d) 135°; e) 15°; f) 22°30′; g) 36°; h) 75°; i) 108°; k) 150°; l) 157°30′; m) 162°.

2) Să se exprime în radiane: a) 51°; b) 27°; c) 76°30′; d) 12°30′; e) 28°42′; f) 73°21′; g) 117°; h) 216°13′.

3) Să se exprime în radiane unghiul intern al unui triunghi, al unui patrulater, al unui pentagon, al unui exagon regulat şi al unui poligon regulat de n laturi.

9. 1) Să se exprime în grade şi minute unghiurile egale cu 1,5; 2; 0,75 radian; să se facă acelaş lucru pentru $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2}{3}\pi$; $1\frac{1}{2}\pi$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3}{4}\pi$; $1\frac{1}{5}\pi$ radiane.

2) Să se exprime (cu ajutorul tablelor) în măsură de grade unghiurile care au măsurile radiane de: 0,6981; 1,3090; 0,2356; 1,0071; 3,8048; 0,48; 1,3; 0,8.

Viteza unghiulară.

10. O roată cu raza de 1,2 m face 300 învîrtituri în 1 minută.

1) Să se afle viteza unghiulară w în 1 secundă (viteza unghiulară se reprezintă prin $\left(\frac{\text{radian}}{\text{secundă}}\right)$.

2) Să se afle viteza circulară a unui punct de pe roată, care se află la o distanţă de 20 cm de centru.

3) Să se afle viteza circulară a unui punct, care se află pe circonferinţa roţii.

4) Să se demonstreze că viteza circulară a învîrtirii unui punct, care se află la distanţa r de centru, este egală cu rw.

11. Viteza unghiulară a unui sul este egală cu 21 $\frac{\text{radian}}{\text{secundă}}$. Să se afle numărul învîrtiturilor lui în 1 minută.

§ 2. Schimbarea funcţiilor trigonometrice, cînd se schimbă unghiul.

1. In care sfert toate funcţiile trigonometrice sînt pozitive? Există vre-un sfert în care toate funcţiile sînt negative?

2. Dacă unghiul aparţine unui *triunghi*, atunci, care din funcţiile lui trigonometrice pot fi negative şi anume cînd?

3. Ce semne au funcţiile trigonometrice ale unei jumătăţi de unghi într'un *triunghi*?

4. Care sînt limitele schimbării sumei $1 + \sin x$?

5. Care din următoarele egalităţi sînt posibile:

1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(a+b)}$; 2) $\cos\beta = a + \frac{1}{a}$; 3) $\sec\alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$?

6. Poate să fie negativă fracţia $\frac{\cos x}{\sec x}$?

Să se simplifice expresiile din problemele 7 — 13:

7. $a \cdot \sin 0° + b \cdot \cos 90° + c \cdot \operatorname{tg} 180°$.

8. $a \cdot \operatorname{tg} 0° + b \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} + c \cdot \sec 0°$.

9. $a \cdot \cos 0° + b \cdot \cos 180° + c \cdot \cos 360°$.

10. $a^2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + 2ab \cdot \sec\pi - b^2 \cdot \sin\frac{3}{2}\pi$.

11. $a^2 \cdot \operatorname{cosec} 90° - 2ab \cdot \sin 180° + b^2 \cdot \operatorname{cosec} 270°$.

12. $a^2 \cdot \sin 2\pi + 2ab \cdot \cos\frac{3}{2}\pi + b^2 \cdot \operatorname{tg} 2\pi$.

13. $a^3 \cdot \operatorname{ctg} 270° + b^3 \cdot \operatorname{tg} 90°$.

14. Intr'un cerc cu raza de 5 cm să se construiască nişte unghiuri de 30°; 120°; 225°; — 30°; — 120°; — 560° şi patru linii trigonometrice ale acestor unghiuri. Măsurînd liniile trigonometrice cu o aproximaţie de 1 mm, să se afle (cu o aproximaţie de 0,1) valorile următoarelor funcţii: 1) tg 30°; 2) cos 120°; 3) sin 225°; 4) cos (— 30°); 5) tg (— 120°); 6) ctg (— 560°).

15. Să se determine semnul fiecărei din următoarele diferenţe: 1) sin 20° — sin 21°; 2) cos 20° — cos 21°; 3) tg 20° — tg 21°; 4) ctg 20° — ctg 21°; 5) cos 20° — cos 120°; 6) sin 120° — sin 240°; 7) tg 120° — tg 40°; 8) ctg 30° — ctg 130°?

16. Care funcţie în fiecare din următoarele perechi are o valoare mai mare: 1) sin 20° sau cos 20°? 2) sin 50° sau cos 50°? 3) tg 40° sau ctg 40°? 4) tg 50° sau ctg 50°?

Construirea şi aflarea unui unghi.

17. Să se construiască unghiurile ale căror sinusuri sînt egale cu: 1) 0,6; 2) $-\frac{1}{2}$. Să se afle valoarea lor cu o aproximaţie de 1°.

18. Să se construiască unghiurile ale căror cosinusuri sînt egale cu: 1) $\frac{2}{3}$; 2) — 0,4.

19. Să se construiască unghiurile ale căror tangente sînt egale cu: 1) + 1,5; 2) — 1.

20. Să se construiască unghiurile ale căror cotangente sînt egale cu: 1) — 2; 2) + 1.

21. După forma generală a unghiului x, să se scrie valorile lui pozitive parţiale mai mici de 360° (2π):

1) $x = 15° + 120° \cdot n$; 2) $x = -60° + 360° \cdot n$;

3) $x = -10° + 60° \cdot n$; 4) $x = \pm 120° + 720° \cdot n$;

5) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi \cdot n$; 6) $x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$;

7) $x = (-1)^n \cdot 45° + 180° \cdot n$; 8) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi \cdot n$.

22. Să se scrie rezolvările generale ale ecvaţiilor de mai jos, aflînd unghiurile (cu o aproximaţie de 1°) prin construire şi măsurare:

1) $\operatorname{tg} x = 2{,}6$; 2) $\operatorname{tg} x = -0{,}8$; 3) $\cos x = 0{,}9$;
4) $\cos x = -\frac{2}{3}$; 5) $\sin x = 0{,}25$; 6) $\sin x = -\frac{5}{7}$.

In problemele 23—31 să se afle valoarea funcţiei trigonometrice conţinută în ecvaţie şi să se construiască unghiurile:

23. $\sin^2 x - 3 = 2 \sin x$.
24. $\cos^2 x + \cos x = 1$.
25. $6 \sin^4 x = 1 - \sin^2 x$.
26. $\sin^2 x = 2 \sin x$.
27. $\operatorname{tg}^2 x = 2 \operatorname{tg} x$.
28. $\sec^2 x = 2 \sec x$.
29. $\operatorname{ctg}^3 x + 4 \operatorname{ctg} x = 0$.
30. $\frac{2}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$.
31. $(\cos x - 2) \cdot (2 \operatorname{cosec} x + 1) = 0$.

Funcţii circulare inverse.

32. Din următoarele ecvaţii să se exprime x cu ajutorul funcţiilor inverse circulare: 1) $\operatorname{tg} x = m$; 2) $\cos x = m$; 3) $\sin x = m$. Ce valori se pot subînţelege sub m în fiecare din aceste ecvaţii?

33. Cu ajutorul funcţiilor inverse circulare să se scrie următoarele egalităţi:

1) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; 2) $\sin(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos 90° = 0$;
5) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$; 6) $\operatorname{tg} 0° = 0$;
7) $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$; 8) $\operatorname{ctg} 0° = \infty$;
9) $\sin x = 0{,}23$; 10) $\cos x = 0{,}5762$;
11) $\operatorname{tg} x = 0{,}468$; 12) $\operatorname{ctg} x = 1{,}237$.

34. Cu ajutorul tablelor să se exprime în grade şi radiane:

1) $\operatorname{arc\,sin} 0{,}7314$; 2) $\operatorname{arc\,cos} 0{,}3987$;
3) $\operatorname{arc\,tg} 3{,}677$; 4) $\operatorname{arc\,ctg} 0{,}5117$.

35. Să se afle x din următoarele ecvaţii:

1) $\operatorname{arc\,sin} x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{3}$;

4) $\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{3} = a$; 5) $\operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a} = \frac{b}{c}$; 6) $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = a$.

36. Să se construiască:

1) $\operatorname{arc\,sin} 0{,}8$; 2) $\operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{1}{3}\right)$; 3) $\operatorname{arc\,cos} \frac{2}{3}$;
4) $\operatorname{arc\,cos}(-0{,}75)$; 5) $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{arc\,tg}(-1{,}5)$;
7) $\operatorname{arc\,tg} 1{,}2$; 8) $\operatorname{arc\,ctg}(-0{,}6)$; 9) $\operatorname{arc\,sec} 1\frac{1}{2}$;
10) $\operatorname{arc\,cosec}(-2)$.

§ 3. Dependenţa dintre funcţiile trigonometrice ale unui şi acelaş unghi.

Să se exprime funcţiile trigonometrice ale unghiului α:

1. Prin $\sin \alpha$.
2. Prin $\cos \alpha$.
3. Prin $\operatorname{tg} \alpha$.
4. Prin $\operatorname{ctg} \alpha$.

Să se afle funcţiile trigonometrice ale unghiului α, cînd se dă:

5. $\sin \alpha = 0{,}8$.
6. $\sin \alpha = -0{,}3$.
7. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.
8. $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.
9. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$.
10. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{9}{40}$.
11. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$.
12. $\operatorname{ctg} \alpha = -3$.
13. $\sec \alpha = 3$.
14. $\sec \alpha = -1\frac{9}{20}$.
15. $\operatorname{cosec} \alpha = 2{,}6$.
16. $\operatorname{cosec} \alpha = -\sqrt{3}$.

Presupunînd $0 < b < a$, să se afle funcţiile trigonometrice ale unghiului α după datele din problemele 17 — 19:

17. $\sin \alpha = \frac{a-b}{a+b}$.
18. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.
19. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$.

Să se afle funcţiile trigonometrice ale unghiului α, atunci cînd:

20. α este un unghi pozitiv ascuţit şi $\operatorname{tg} \alpha = 4\frac{19}{20}$.
21. α este un unghi al unui triunghi şi $\cos \alpha = -0{,}28$.
22. α se termină în cvadrantul III şi $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.
23. α se termină în cvadrantul IV şi $\operatorname{ctg} \alpha = -1{,}05$.

Să se simplifice expresiile în problemele 24 — 52:

24. $1 - \sin^2\alpha$.
25. $1 - \cos^2\alpha$.
26. $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.
27. $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - 1}$.
28. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$.
29. $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$.
30. a) $\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$; b) $\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$.
31. a) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; b) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1}$.
32. $\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.
33. $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$.
34. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$.
35. $\sin\alpha \cdot \sec\alpha$.
36. $\cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$.
37. $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sec\alpha$.
38. $\sin\alpha : \operatorname{tg}\alpha$.
39. $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{ctg}\alpha$.
40. $1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$.
41. $1 - \sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$.
42. $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha$.
43. $(\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha)^2$.
44. $(\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha)^2 - 1$.
45. $\sin^2\alpha \cdot \sec^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.
46. $\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1$.
47. $\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1$.
48. $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.
49. $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}$.
50. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.
51. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.
52. $\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

53. Să se exprime $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$: a) prin $\sin\alpha$ și b) prin $\cos\alpha$.

54. Să se exprime $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$ prin $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$.

55. Să se exprime $\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$ prin $\operatorname{tg}\alpha$.

56. Să se exprime $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ prin $\operatorname{ctg}\alpha$.

57. Să se exprime $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$: a) prin $\operatorname{tg}\alpha$ și b) prin $\operatorname{ctg}\alpha$.

58. Să se exprime $\frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$: a) prin $\operatorname{tg}\alpha$ și b) prin $\operatorname{ctg}\alpha$.

59. Să se exprime $\sec\alpha$ prin $\operatorname{ctg}\alpha$, cînd α este un unghi în cvadrantul IV.

60. Să se calculeze $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$, cînd $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}$.

61. Să se afle $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, cînd $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.

62. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m$; să se afle: $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$ și $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.

Să se demonstreze identitățile în problemele 63—92:

63. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.
64. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
65. $\frac{\sec\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha + 1}$.
66. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$.
67. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = \sec^2\alpha - \operatorname{cosec}^2\alpha$.
68. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \sec^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\alpha$.
69. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.
70. $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.
71. $\frac{\sin\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.
72. $\frac{\sec\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$.
73. $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}{\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha}$.
74. $\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \frac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.
75. $\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha} : \frac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha} = \operatorname{ctg}^3\alpha$.
76. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha} = 1$.
77. $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = 1$.
78. $\frac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha - 1} + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1} = 1$.
79. $\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.
80. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$.
81. $\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\alpha$.
82. $\sec^2\alpha(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1) = \operatorname{cosec}^2\alpha$.
83. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 + \operatorname{tg}\alpha)$.
84. $(\sin\alpha - \operatorname{cosec}\alpha)(\cos\alpha - \sec\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.
85. $(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = (1 + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)$.

86. $\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)+\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)=\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$.

87. $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$.

88. $\operatorname{tg}^3\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sec\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha\cdot\sec^2\alpha=\operatorname{tg}^3\alpha+$ $+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

89. $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

90. $\left(\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2=\dfrac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

91. $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

92. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=2\operatorname{tg}\alpha$.

Să se rezolve ecvațiile 93—113. După funcția găsită din ecvație, să se construiască un unghi și să se măsoare cu raportorul (cu o aproximație de 1°), iar răspunsul obținut să se scrie sub forma generală.

93. $\sin^2 x=1+\cos^2 x$.

94. $\sin x\cdot\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}$.

95. $\sin x=\operatorname{ctg}x$.

96. $\cos x-1+2\sin x\cdot\operatorname{tg}x=0$.

97. $\sin^2 x+\cos x=0$.

98. $\sec x=\operatorname{tg}^2 x$.

99. $2\cos^2 x=3\sin x+2$.

100. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=\frac{3}{2}$.

101. $\cos x=2\operatorname{tg}x$.

102. $\operatorname{cosec}x-\sin x=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x$.

103. $2\operatorname{tg}x=-3\operatorname{cosec}x$.

104. $2\sec x=\operatorname{cosec}x$.

105. $2\cos^2 x+4\sin^2 x=3$.

106. $2(\cos^2 x-\sin^2 x)=1$.

107. $\sin^4 x-\cos^4 x=0{,}5$.

108. $1+\sin x\cos x-\sin x-\cos x=0$.

Să se rezolve ecvațiile omonime relativ la sinus și cosinus sau care se reduc la ecvații omonime relativ la sinus și cosinus:

109. $\sin x=\cos x$.

110. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$.

111. $3\sin^2 x=\cos^2 x$.

112. $\sin^2 x+2\sin x\cos x=3\cos^2 x$.

113. $1-3\cos^2 x=2\sin x\cos x$.

§ 4. Funcțiile unghiurilor suplimentare și complimentare.

1. Să se reducă la unghiul mai mic de 45°: 1) sin 73°; 2) cos 80°40′; 3) tg 69°25′40″; 4) ctg 59°59′.

2. Să se reducă la aceleași funcții ale unghiului ascuțit: 1) sin 112°20′; 2) cos 99°25′35″; 3) tg 108°48′36″; 4) ctg 140°40′.

3. Să se reducă la unghiul mai mic de 45°: 1) sin 121°40′; 2) sin 163°35′; 3) cos 158°17′; 4) cos 98°21′; 5) tg 160°27′32″; 6) tg 106°32′; 7) ctg 120°28′40″; 8) ctg 140°42′.

Să se simplifice expresiile:

4. $\dfrac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)}{\operatorname{ctg}(90°-\alpha)}$.

5. $\dfrac{\cos^2(90°-\alpha)-1}{\cos(180°-\alpha)}$.

6. $\sin(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)$.

7. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

8. $\sin(90°-\alpha)+\sin(90°+\alpha)+2\cos(180°-\alpha)$.

9. $\cos(90°-\alpha)+\cos(90°+\alpha)$.

10. $\operatorname{tg}43°\cdot\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}47°$.

11. $\cos(180°-\alpha)\cdot\sin(90°+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(90°+\alpha)$.

12. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

13. $\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)}$.

14. $\dfrac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cos(180°-\alpha)\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)\operatorname{ctg}(90°+\alpha)\operatorname{tg}(90°+\alpha)}$.

15. Să se arate că: $\sin(45°+\alpha)=\cos(45°-\alpha)$; $\cos(45°+\alpha)=\sin(45°-\alpha)$ ș. a.

§ 5. Tablele mărimilor naturale ale funcțiilor trigonometrice.

Folosindu-se de tablele mărimilor trigonometrice naturale, să se afle valorile numerice ale următoarelor funcții:

1. 1) sin 15°; 2) sin 45°; 3) sin 60°; 4) sin 73°; 5) sin 38°30′; 6) sin 69°24′; 7) sin 11°50′; 8) sin 87°10′.

2. 1) tg 20°; 2) tg 45°; 3) tg 85°;
4) tg 72°30′; 5) tg 17°42′; 6) tg 53°13′;
7) tg 20°48′; 8) tg 83°7′; 9) tg 85°28′;
10) tg 88°30′; 11) tg 89°48′; 12) tg 89°59′.
1) cos 65°; 2) cos 45°; 3) cos 30°;
4) cos 73°; 5) cos 38°30′; 6) cos 20°24′;
7) cos 61°10′; 8) cos 78°46′; 9) cos 2°52′;
10) cos 1°20′.
4. 1) ctg 20°; 2) ctg 45°; 3) ctg 37°30′;
4) ctg 71°24′; 5) ctg 69°13′; 6) ctg 19°37′;
7) ctg 88°15′; 8) ctg 5°;
9) ctg 2°27′; 10) ctg 90°; 11) ctg 1°53′.

Să se afle mărimea unghiurilor ascuţite după valorile date ale funcţiilor lor:

5. 1) $\sin\alpha = 0{,}3420$; 2) $\sin\beta = 0{,}5948$;
3) $\sin\gamma = 0{,}842$; 4) $\sin x = 0{,}9293$;
5) $\sin y = 1{,}0024$; 6) $\sin z = 0{,}3932$.
6. 1) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4452$; 2) $\operatorname{tg}\beta = 11{,}43$;
3) $\operatorname{tg}\gamma = 2{,}675$; 4) $\operatorname{tg} x = 0{,}5452$;
5) $\operatorname{tg} y = 5{,}558$; 6) $\operatorname{tg} z = 0{,}5$;
7) $\operatorname{tg} u = 0{,}42$; 8) $\operatorname{tg} v = 12{,}9$;
9) $\operatorname{tg} w = 6{,}63$.
7. 1) $\cos\alpha = 0{,}891$; 2) $\cos\beta = 0{,}910$;
3) $\cos\gamma = 0{,}6361$; 4) $\cos x = 1{,}0008$;
5) $\cos y = 0{,}8189$; 6) $\cos z = 0{,}4485$.
8. 1) $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}747$; 2) $\operatorname{ctg}\beta = 0{,}4142$;
3) $\operatorname{ctg}\gamma = 1{,}768$; 4) $\operatorname{ctg} x = 1{,}4948$;
5) $\operatorname{ctg} y = 0{,}6946$; 6) $\operatorname{ctg} z = 1{,}6946$;
7) $\operatorname{ctg} u = 7{,}115$; 8) $\operatorname{ctg} v = 10{,}23$;
9) $\operatorname{ctg} w = 20$.

Folosind tablele, să se afle valorile următoarelor funcţii ale unghiurilor obtuze:

9. sin 105°; sin 172°8′; sin 140°15′; sin 115°22′.
10. cos 118°; cos 156°30′; cos 98°42′; cos 169°17′.
11. tg 121°; tg 160°24′; tg 101°41′; tg 147°39′.
12. ctg 175°; ctg 124°30′; ctg 171°13′; ctg 111°11′.

§ 6. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghe.

Insemnări. Intr'un triunghi dreptunghi ABC, unghiul $A = \alpha$, unghiul $B = \beta$, unghiul $C = 90°$, cateta $BC = a$, cateta $AC = b$ şi ipotenuza $AB = c$.

1. Se dă un triunghi dreptunghi ABC. Să se afle: 1) $\sin\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha$, cînd $a = 48\,cm$ şi $c = 50\,cm$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$ şi $\cos\alpha$, cînd $a = 15\,m$ şi $b = 20\,m$; 3) $\operatorname{tg}\beta$ şi $\cos\beta$, cînd $b = 8{,}4\,cm$ şi $c = 8{,}5\,cm$.

2. Lungimile laturilor unui triunghi dreptunghi ABC se exprimă în centimetri prin numerele $a = 7\frac{1}{5}$ şi $c = 17$. Să se afle toate funcţiile unghiului β.

3. Intr'un triunghi dreptunghi ABC să se calculeze: 1) cateta a, cînd se cunosc ipotenuza $c = 30{,}6\,cm$ şi $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; 2) c, cînd se cunosc $a = 51\,cm$ şi $\sin\alpha = 0{,}75$.

4. Intr'un triunghi dreptunghi ABC să se calculeze cateta a, cînd: 1) $b = 14\,m$ şi $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}72$; 2) $b = 20{,}4\,dm$ şi $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$.

5. Un dirijabil a nimerit în făşia luminată de proector, cînd axa proectorului forma cu orizontul un unghi de 47°. In acelaş timp distanţa dela proector pînă la dirijabil pe linie dreaptă era de 3,5 *km*. Să se calculeze: 1) înălţimea la care s'a ridicat dirijabilul, 2) distanţa orizontală dintre dirijabil şi proector.

Fig. 2.

6. O baterie e aşezată pe o stîncă de 150 *m* înălţime. Ţinta care pluteşte pe mare (fig. 2) formează cu bateria un unghi de 9°. Care este distanţa (în direcţia orizontală) dintre ţintă şi baterie?

7. Periscopul unui submarin se vede la o distanţă de 1500 *m* de fortul, pe care sînt aşezate tunurile la o înălţime de 330 *m* dela nivelul apei. Să se afle unghiul cu care trebue

lăsate în jos ţevile tunurilor pentru ca ele să fie îndreptate spre submarin.

8. Un aeroplan semnalizează bateriei că el se află tocmai deasupra ţintei la o înălţime de 1700 m (fig. 3); în acelaş timp observatorul bateriei găseşte că unghiul înălţimii aeroplanului e de 25°. Să se calculeze distanţa (în linie orizontală) între baterie şi ţintă.

9. Pentru a calcula lăţimea unui rîu, se duce pe un mal al lui, imediat lîngă apă, baza AB, egală cu a metri; din capătul A al bazei se vede pe celalt mal imediat lîngă apă un copac C în direcţie perpendiculară pe bază; iar din celalt capăt B al bazei, acest copac se vede formînd un unghi β cu el. Să se calculeze lăţimea rîului, cînd $a = 42\,m$ şi $\beta = 25°28'$.

10. Dintr'un punct, care se găseşte la o distanţă de a metri de centrul bazei unui turn, vîrful turnului se vede sub unghiul înălţimii α. Să se afle înălţimea turnului ($a = 86{,}6$; $\alpha = 22°17'$).

11. Dintr'o fereastră, care se găseşte la o înălţime $h = 12\,m$, malurile unui rîu se văd sub unghiurile $\alpha_1 = 17°$ şi $\alpha_2 = 45°$. Amîndouă unghiurile se găsesc într'un singur plan perpendicular pe direcţia rîului. Să se afle lăţimea rîului.

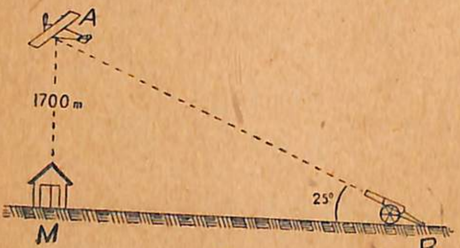


Fig. 3.

12. O cale ferată de munte se urcă cu 1 m la fiecare 30 m de lungime. Să se afle unghiul urcuşului.

13. Un om, după ce a parcurs 1050 m pe coasta unui deal, s'a ridicat la o înălţime de 90 m deasupra planului de bază (poală) al dealului. Să se afle unghiul (în mijlociu) al povîrnişului dealului.

14. La ridicarea planului unei străzi de 728 m lungime, care se urcă uniform, s'a aflat că ea are o înălţime verticală de 37,4 m. Să se afle unghiul urcuşului şi proecţia orizontală a străzii.

15. Pe un deal este înfipt un jalon lung de a metri. Dintr'un punct, care se află în planul orizontal al bazei (poalei) dealului la distanţa b metri de capătul de sus al jalonului, acest capăt se vede sub unghiul α faţă de orizont. Să se afle înălţimea dealului ($a = 2$; $b = 14$; $\alpha = 63°18'$).

16. La ce distanţă una de alta trebue săpate gropile pentru a sădi copaci pe coasta unui munte (fig. 4), care are un povîrniş faţă de orizont de α ($a = 3{,}5$; $\alpha = 25°18'$), dacă pe suprafaţa orizontală a pămîntului se presupune a sădi copacii la distanţa de a metri unul de altul?

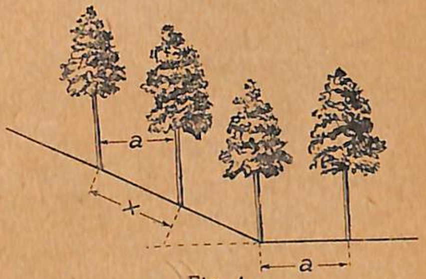


Fig. 4.

17. Pe dreapta MN se dă un punct A, din el este dus segmentul AB lung de a metri, care formează cu dreapta MN un unghi ascuţit α; să se afle proecţia (x) a segmentului AB pe dreapta MN şi să se urmărească schimbarea acestei proecţii la schimbarea unghiului α dela 90° pînă la 0° şi invers: dela 0° pînă la 90°.

18. O construcţie de 30 m înălţime aruncă o umbră lungă de 45 m. Să se afle înălţimea soarelui.

19. La amiază, cînd înălţimea soarelui e de 28°, coşul unei fabrici aruncă o umbră de 76 m lungime. Să se afle înălţimea coşului.

20. Care este înălţimea soarelui în timpul: 1) cînd lungimea umbrei unui om care stă în picioare este egală cu jumătatea staturii sale; 2) cînd ea este de două ori mai mare decît statura sa şi 3) cînd ea este de $2\frac{1}{2}$ ori mai mare decît statura sa?

21. Umbra unui jalon vertical este mai scurtă decît însuşi jalonul cu $\frac{1}{n}$ din lungimea lui. Care este înălţimea soarelui ($n = 10{,}5$)?

22. Un tun H, care trage în ţinta T dela distanţa de 2500 m, a primit ordin să mute focul către o altă ţintă S, care se găseşte la o distanţă de 1500 m de T. Cu ce unghi trebue mişcat tunul, dacă ST este perpendiculară pe HT?

23. Două puncte pornesc în acelaş timp din vîrful unui unghi drept şi se mişcă uniform unul pe o latură, al doilea

pe cealaltă latură a acelui unghi; primul punct parcurge cîte a metri pe secundă, iar al doilea cîte b metri. Sub ce unghi φ la direcția mișcării primului punct se vede din el punctul al doilea?

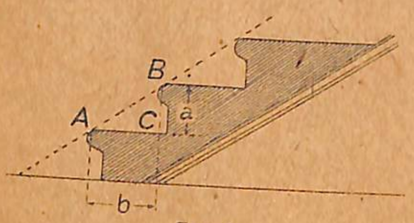


Fig. 5.

24. O scară de piatră dintr'o casă (fig. 5) are în fiecare marș (adică între fiecare două platforme de cotitură) cîte 15 trepte; lățimea folositoare a fiecărei trepte (așa numitul loc de călcat) este de $b = 27\,cm$, iar înălțimea (pasul) treptei de $a = 18\,cm$. Să se afle unghiul urcușului acestei scări.

25. Lățimea fiecărei trepte a unei scări dintr'o casă e de $25\,cm$. Care trebue să fie înălțimea (pasul) treptei pentru ca unghiul urcușului scării să fie de $40°$?

26. Două străzi drepte se întretae formînd un unghi de $51°50'$. Una din ele, la distanța de $1625\,m$ de locul întîlnirii lor, trebue să fie unită cu cealaltă pe drumul cel mai scurt. Să se afle lungimea cea mai scurtă a acestei ulicioare.

27. Segmentul AO, care unește un punct oarecare exterior A cu centrul O al unui cerc dat, are lungimea $c = 2{,}53\,m$. Din punctul A este dusă la cerc tangenta AC, care formează cu AO un unghi $\alpha = 38°46'$. Să se afle lungimea razei (r) și a tangentei (x).

28. Să se afle raza cercului, circumscris unui triunghi dreptunghi, a cărui catetă este egală cu a decimetri, iar unghiul ascuțit adiacent ei este egal cu β.

Probleme care se reduc la rezolvarea triunghiurilor dreptunghe.

29. Generatoarea părții de forma unui con a unui arbore (fig. 6) are o ridicare de 12%, adică la fiecare $100\,mm$ de înălțime raza se mărește cu $12\,mm$. Să se afle unghiul ridicării α și diametrul D ($h = 105\,mm$, $d = 80\,mm$).

30. Intr'un trunchi de con (fig. 6) sînt cunoscuți ambii diametri: d și D. Generatoarea conului are o ridicare de $1:n$. Să se afle distanța h între planul inițial și planul final și unghiul ridicării α ($n = 20$).

31. Terasamentul unei căi ferate, înalt de $120\,m$, are $360\,m$ lățime la bază și $60\,m$ lățime sus. Să se calculeze unghiul înclinării povîrnișului față de orizont.

32. Terasamentul unei căi ferate are o lățime sus de $60\,m$ și jos de $240\,m$. Laturile laterale ale terasamentului sînt inclinate față de orizont sub unghiul de $35°$. Să se afle înălțimea terasamentului.

33. Secțiunea transversală a unui terasament, la construirea căruia a fost folosit cel mai mare povîrniș posibil $\varphi = 39°$, reprezintă un trapez isoscel. Baza de jos a trapezului $a = 10\,m$, înălțimea $h = 3\,m$. Să se afle baza de sus a trapezului.

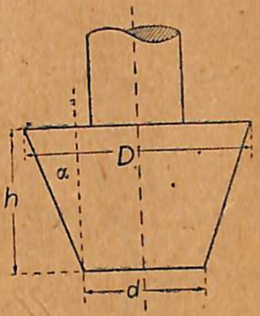


Fig. 6.

34. Avînd cunoscute baza b și latura laterală a a unui triunghi isoscel, să se afle unghiul la bază ($b = 28{,}13$; $a = 17{,}53$).

35. Avînd cunoscute baza b și înălțimea h a unui triunghi isoscel, să se afle unghiul lui la vîrf ($b = 31{,}26$ și $h = 20{,}75$).

36. Intr'un cerc de raza R să se afle lungimea coardei, care subîntinde un arc de α grade ($R = 4{,}175$; $\alpha = 37°42'$).

37. Intr'un cerc de raza $R = 35{,}8\,dm$ este dusă o coardă lungă de $a = 28{,}7\,dm$. Să se afle numărul gradelor și minutelor arcului subîntins de coardă, și distanța dela coardă la centru.

38. O coardă este egală cu $\frac{3}{4}$ din diametrul cercului. Să se afle numărul gradelor și minutelor arcului subîntins de această coardă.

39. O coardă împarte o circonferință în două părți astfel încît raportul lor este egal cu $m:n$. Lungimea circonferinței este egală cu c metri. Să se afle distanța dela coardă la centru ($m:n = 3:7$; $c = 120$).

40. Unghiul α, înscris într'o circonferință, se razemă pe o coardă de a centimetri lungime. Să se afle raza cercului.

41. Se dau două forțe: $P = 4{,}372\,kg$ și $Q = 5{,}645\,kg$, cu direcții perpendiculare una pe alta. Ce unghi formează rezultanta cu forța P și care este mărimea ei?

42. Baza unui triunghi isoscel este egală cu b decimetri, unghiul dela bază este egal cu α. Să se afle perimetrul triunghiului.

43. Baza unui triunghi isoscel este egală cu b decimetri, iar înălțimea lui laterală este egală cu h decimetri. Să se afle unghiul x dela baza triunghiului.

44. In figura 7 se dă o îmbucare; să se afle unghiul α al inclinării laturilor îmbucărei către baza ei.

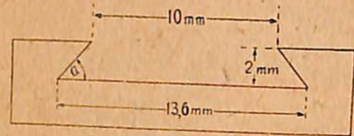


Fig. 7.

45. In figura 8 se dă o crestătură ghintată specială pentru piedica la tunuri. Să se calculeze unghiul α pentru dintele, care serveşte pentru facerea acestui ghint.

46. Trei puncte A, B şi C sînt situate astfel încît distanța lor pe hartă se exprimă prin următoarele numere: $AB = 0{,}85\,dm$, $AC = 1{,}20\,dm$, $BC = 1{,}20\,dm$. Punctul B se găseşte exact spre nord de punctul A. Să se afle direcția din A la C.

47. Brațele unei pîrghii drepte sînt de $5\,dm$ şi $15\,dm$ lungime. Cu cîți decimetri se ridică (vertical) fiecare capăt al ei, cînd pîrghia se întoarce cu: 1) $40°$, 2) $60°$ şi 3) $90°$ dela poziția orizontală?

48. Un vapor se mişcă în felul următor (vezi tabloul):

Direcția	Distanța parcursă în km
23°NE	10
37°NE	13
82°NE	15

Să se afle distanțele parcurse de vapor spre est şi spre nord de punctul de plecare.

49. Avînd date laturile a şi b ale unui dreptunghi, să se afle unghiurile pe care le formează diagonala lui cu laturile ($a = 75{,}2\,dm$; $b = 63{,}6\,dm$).

50. Laturile unui dreptunghi sînt egale cu a şi b. Să se calculeze unghiul dintre diagonalele lui ($a = 13{,}5\,dm$; $b = 7{,}4\,dm$).

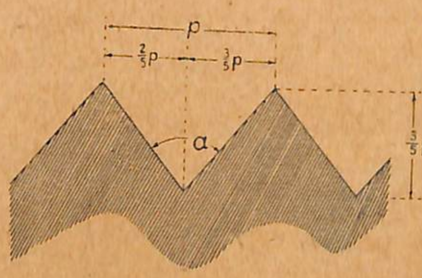


Fig. 8.

51. Intr'un dreptunghi mijlocurile laturilor, egale cu a şi b centimetri, servesc de vîrfuri ale unui patrulater. Să se afle unghiurile formate de laturile acestui patrulater cu laturile dreptunghiului ($a = 23{,}76$; $b = 58{,}28$).

52. Diagonalele unui romb sînt egale cu d_1 şi d_2 centimetri ($d_1 = 28$; $d_2 = 49$). Să se calculeze unghiurile rombului.

53. 1) AP (fig. 9) este biela motorului şi OA este manivela lui. Să se afle lungimea OB şi AB, dacă $OA = r = 0{,}4\,m$, iar unghiul $\alpha = 30°$. Apoi să se calculeze unghiul APB şi lungimea PB a proecției bielei pe direcția OP, cînd lungimea bielei $l = 2\,m$.

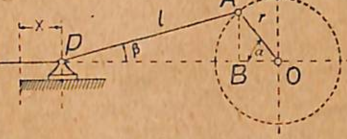


Fig. 9.

2) Să se demonstreze că între unghiurile α şi β, formate de bielă şi manivelă cu planul orizontal, există dependența:

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\alpha.$$

3) Să se găsească unghiul corespunzător β pentru diferite unghiuri α, cînd raportul $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ ($a = 0°$; $10°$; $20°$; $30°$; $40°$; $50°$; $60°$; $70°$; $80°$; $90°$).

4) Dece, cînd valoarea lui $\alpha = 90°$, unghiul β (în formula dată în p. 2 al acestei probleme) are cea mai mare mărime?

5) Care este mărimea unghiului β, cînd biela şi manivela sînt perpendiculare una pe alta?

6) Fie că, dacă $\alpha = 0$, punctul P are poziția Q. Să se demonstreze că mişcarea extremității bielei $QP = x$ poate să fie calculată după formula:

$$x = r(1 - \cos\alpha) + l(1 - \cos\beta).$$

Să se calculeze x pentru valorile date mai sus (p. 3) ale unghiurilor α, dacă lungimea bielei $r = 300\,mm$, iar a manivelei $l = 1500\,mm$.

54. Se dă un cerc cu raza de r centimetri. Dintr'un punct, care se află la distanța a centimetri de centru, sînt duse două tangente. Să se afle unghiul dintre ele ($r = 3{,}35$; $a = 8{,}32$).

55. Linia centrelor a două cercuri (fig. 10) este egală cu d centimetri, iar razele lor sînt egale cu R şi r centimetri. Să se afle unghiurile α şi β formate de întretăerea tangentelor comune externă şi internă ale acestor cercuri cu linia centrelor lor ($R = 3{,}065$; $r = 1{,}007$; $d = 6{,}245$).

56. Dintr'un punct oarecare A al unei circonferințe cu raza de 5 *dm*, sînt duse două coarde de 7 *dm* și 8 *dm* lungime. Să se calculeze unghiul format de aceste coarde, considerînd două cazuri, cînd coardele se găsesc: 1) de amîndouă părțile razei AO și 2) de o singură parte a ei.

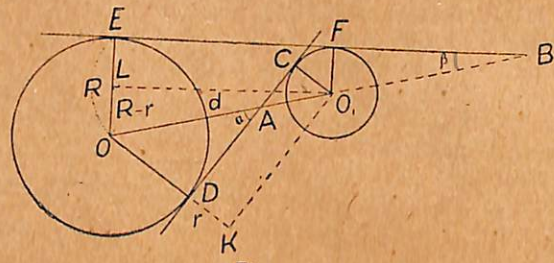


Fig. 10.

57. Intr'un triunghi isoscel înălțimea este egală cu h decimetri, iar înălțimea laterală este egală cu h_1 decimetri. Să se afle unghiul dela baza triunghiului ($h = 2{,}5$; $h_1 = 3$).

58. Latura laterală a unui triunghi isoscel este de a *cm*, unghiul dela vîrf este de β. Să se afle razele cercurilor circumscris (R) și înscris (r).

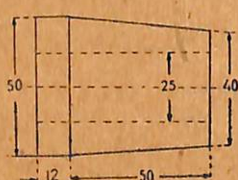


Fig. 11.

59. Cateta unui triunghi dreptunghi este egală cu b metri, iar perpendiculara dusă din vîrful unghiului drept pe ipotenuză este egală cu h metri. Să se afle un unghi ascuțit al triunghiului, apoi să se afle cealaltă catetă a și ipotenuza c.

60. Să se afle unghiul dintre generatoarele conului unei bucele date în figura 11.

61. Să se afle (cu o aproximație de 1°) unghiul dintre generatoarele trunchiului de con pentru următoarele trunchiuri de con:

Diametrul cel mai mare în *mm*	50	75	75	75	100	100
" " " mic " "	25	25	50	50	25	25
Lungimea trunchiului " "	50	75	75	25	40	25

62. Avînd cunoscute diametrul globului pămîntesc egal cu 12 740 *km* și latitudinea $\varphi°$ a locului, să se afle lungimea circonferinței cercului paralel care corespunde acelui loc ($\varphi = 57°4'33''$).

63. Ce unghi de înălțime α (fig. 12) trebue dat tunului la tragere peste o pădure în care vîrfurile copacilor sînt mai sus de nivelul tunului cu 15 *m* și se găsește la o distanță de 200 *m* de tun? La calculare se adaogă deobicei la înălțimea paravanului (în cazul de față la înălțimea pădurii) 0,01 din distanța dela tun pînă la paravan.

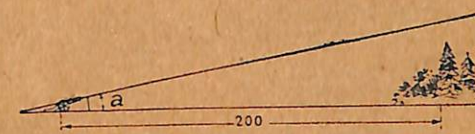


Fig. 12.

64. Dreapta, care reunește tunul cu ținta, formează cu orizontul tunului un unghi, numit *unghiul locului ținței*. Să se calculeze unghiul locului ținței pentru tragerea în o țintă, care se găsește cu 65 *m* mai sus decît nivelul tunului. Distanța dela tun pînă la țintă măsurată pe harta cu scara de $\frac{1}{10000}$, s'a aflat egală cu 31,5 *cm*.

65. Două puncte A și B se găsesc la o distanță de 15 *cm* unul de altul; înaintea lor se găsește o oglindă plană la distanța $a = 5$ *cm* de un punct și $b = 7$ *cm* de celalt. Care este unghiul căderii razei care ese din A și este aruncată în direcția B?

§ 7. Rezolvarea triunghiurilor oblicunghe.

Teorema sinusurilor.

1. Să se rezolve un triunghi avînd cunoscute:
1) $a = 109$; $\beta = 33°24'$; $\gamma = 66°59'$;
2) $c = 16$; $\alpha = 143°8'$; $\beta = 22°37'$.

2. Se cere de a afla distanța dintre uzina A și gara B aflată pe altă parte de rîu (fig. 13). Se dă: $AC = 100$ *m*; $\angle BAC = 74°$; $\angle BCA = 44°$.

3. Pentru a afla înălțimea coșului unei uzine, de baza cărui nu e cu putință să ne apropiem, am măsurat baza $AC = 11{,}0$ *m*, a cărei prelungire se razemă pe baza coșului (fig. 14). Unghiul $BAD = 49°$; $\angle BCD = 35°$. Inălțimea grafometrului este de 1,37 *m*. Care este înălțimea coșului?

4. Pentru a afla înălţimea unui obiect vertical AB, se duce dela baza lui A baza AC egală cu b metri, care se ridică (se urcă) dela A spre C, formînd cu planul orizontului un

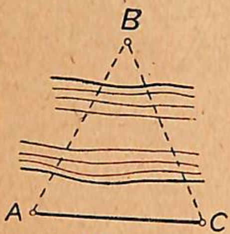


Fig. 13.

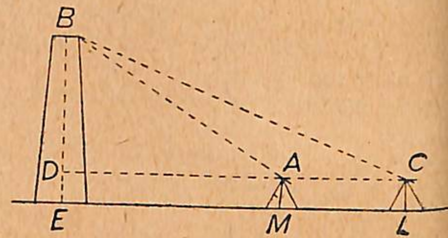


Fig. 14.

unghi de $\alpha°$ (fig. 15). Din capătul C al bazei, vîrful obiectului se vede sub unghiul înălţimii de $\beta°$. Să se afle înălţimea obiectului.

5. Pe un munte, al cărui povîrniş formează cu orizontul un unghi de $\beta°$, se află un copac. Umbra copacului, care cade în jos pe povîrnişul muntelui, cînd soarele e la înălţimea de $\alpha°$, are lungimea de l metri. Să se afle înălţimea copacului.

6. Una din diagonalele unui paralelogram este egală cu d şi împarte unghiul lui în părţi de $\alpha°$ şi $\beta°$. Să se afle laturile paralelogramului.

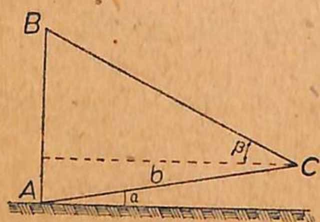


Fig. 15.

7. Intr'un triunghi sînt date o latură a şi două unghiuri alăturate la ea $\beta°$ şi $\gamma°$. Să se afle bisectriţele l_a, l_b şi l_c ale tuturor unghiurilor triunghiului.

8. Pentru a afla lăţimea unui rîu, am dus pe malul rîului, îndată lîngă apă, baza AB de c metri lungime şi am însemnat pe celalt mal un copac C, care se găseşte deasemenea lîngă apă; apoi am măsurat $\angle CAB = \alpha°$ şi $\angle ABC = \beta°$. Să se calculeze lăţimea rîului lîngă copacul C ($c = 400$; $\alpha = 45°$; $\beta = 30°$).

9. Intr'un triunghi ABC se dă; $\angle A = \alpha°$; $\angle C = \gamma°$ şi înălţimea $AD = h_a$ metri. Să se afle lungimea laturilor lui.

Suprafaţa triunghiului.

10. Pentru a afla suprafaţa unui triunghi ABC s'a măsurat două laturi a şi b şi unghiul dintre ele γ. Să se calculeze suprafaţa ($a = 125\ m$; $b = 160\ m$; $\gamma = 52°$).

11. Intr'un triunghi isoscel, latura laterală este egală cu b, iar unghiul dela vîrf este α. Să se afle suprafaţa ($b = 10\ m$; $\alpha = 75°20'$).

12. Pentru care valoare dată lui γ suprafaţa triunghiului va fi cea mai mare, cînd două laturi ale triunghiului a şi b vor rămine constante, iar unghiul γ, format de ele, se va schimba dela $0°$ pînă la $180°$?

13. Să se demonstreze că suprafaţa unui paralelogram este egală cu produsul a două laturi ale lui cu sinusul unghiului cuprins între ele.

14. Să se demonstreze că suprafaţa oricărui patrulater este egală cu jumătatea produsului diagonalelor sale cu sinusul unghiului cuprins între ele.

15. Să se afle suprafaţa unui romb, cînd se cunosc latura a şi unghiul α ($a = 7{,}5\ cm$; $\alpha = 22°10'$).

16. Să se afle suprafaţa Q a unui dreptunghi, cînd se cunosc lungimea diagonalei lui d şi unghiul φ dintre diagonale. Să se afle maximumul suprafeţei Q, cînd φ se schimbă dela $0°$ pînă la $180°$.

17. Bazele unui trapez sînt a şi b, latura este c, unghiul alăturat ei este α. Să se afle suprafaţa trapezului.

18. Suprafaţa unui paralelogram este de $12\ dm^2$; laturile lui $a = 3{,}7\ dm$ şi $b = 4{,}2\ dm$. Să se afle unghiurile paralelogramului.

19. Suprafaţa unui triunghi este de $71{,}24\ cm^2$; laturile lui $a = 15\ cm$ şi $b = 13\ cm$. Să se afle unghiul dintre ele.

20. Să se afle suprafaţa unui lot de pămînt de forma unui triunghi la care o latură este c, iar celelalte două formează cu prima unghiurile α şi β ($c = 20$; $\alpha = 65°30'$; $\beta = 84°30'$).

21. Două hotare rectilinii ale unui lot de pădure se întretae, formînd unghiul $BAC = \alpha$. E nevoe de a tăia din acest lot o suprafaţă DAE de Q metri pătraţi cu ajutorul dreptei DE, care formează cu AC un unghi $AED = \gamma$. E uşor a jalona o astfel de dreaptă, cînd sînt cunoscute laturile AE şi AD. Să se afle lungimea acestor laturi.

22. Intr'un triunghi ABC se dă: unghiul $C=\gamma$ şi înălţimile h_a şi h_b, duse din vîrfurile A şi B. Să se afle suprafaţa triunghiului.

23. Să se afle suprafaţa unui triunghi, avînd cunoscute două unghiuri α şi β şi înălţimea h_b.

Teorema cosinusurilor.

24. In triunghiul ABC se dă: $b=7$; $c=10$; $\alpha=56^\circ 29'$. Să se afle a.

25. Să se rezolve triunghiul ABC, avînd cunoscute:

1) $a=10$; $b=15$; $\gamma=123^\circ 17'$;
2) $a=0{,}2$; $c=0{,}6$; $\beta=23^\circ 28'$;
3) $c=40$; $a=100$; $\beta=16^\circ 28'$.

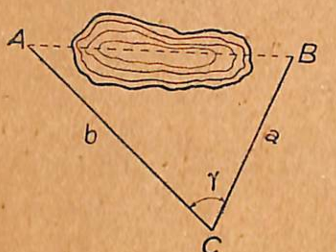


Fig. 16.

26. Pentru a afla distanţa dintre două puncte A şi B, între care nu se poate trece (fig. 16), s'a ales un al treilea punct C, astfel că din el se văd şi sînt accesibile ambele puncte A şi B; apoi s'a măsurat distanţele $BC=a$, $AC=b$ şi unghiul $ACB=\gamma$. Să se calculeze AB ($a=100\,m$; $b=80\,m$; $\gamma=48^\circ 57'$).

27. In triunghiul ABC sînt cunoscute laturile $a=3$, $b=4$, $c=6$. Să se afle unghiul γ.

28. Laturile unui paralelogram sînt de $4{,}0\,m$ şi $5{,}0\,m$. Un unghi este de 52°. Să se afle ambele diagonale.

29. Două forţe: $P=100\,kg$ şi $Q=200\,kg$ sînt aplicate la punctul de razem, formînd între ele un unghi $\alpha=50^\circ$. Să se afle mărimea rezultantei R şi unghiurile, pe care le formează ea cu forţele P şi Q.

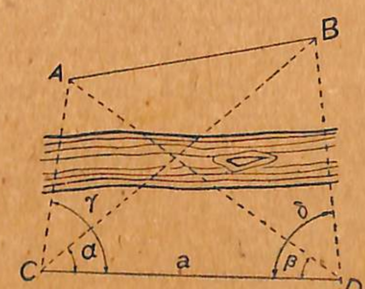


Fig. 17.

30. Pentru a afla distanţa dintre două puncte pe care nu le putem atinge A şi B (fig. 17) s'a măsurat baza CD, care nu trece între punctele A şi B şi este egală cu a metri, şi unghiurile: $ACD=\gamma$, $BCD=\alpha$, $ADC=\beta$ şi $BDC=\delta$. Să se calculeze AB, cînd $a=2000$; $\alpha=52^\circ 40'$; $\beta=42^\circ 1'$; $\gamma=86^\circ 40'$; $\delta=81^\circ 15'$.

§ 8. Formulele reducerii.

1. Să se reducă sinusul, cosinusul, tangenta şi cotangenta unghiurilor

a) $162^\circ 30'$; b) 230°; c) 335°

la *aceleaşi* funcţii ale unghiului ascuţit.

2. Să se înlocuiască sinusul, cosinusul, tangenta şi cotangenta unghiurilor

a) $25^\circ 30' 20''$; b) 130°; c) 250°; d) 340°

prin funcţiile unghiului ascuţit omoloage după numire.

3. Să se înlocuiască funcţiile trigonometrice ale unghiurilor

a) 75°; b) 150°; c) 200°; d) 315°

astfel ca unghiul să nu fie mai mare decît 45°.

Să se reducă la cel mai mic argument pozitiv:

4. a) $\sin 2000^\circ$; b) $\sin(-1000^\circ)$; c) $\cos 1500^\circ$; d) $\cos(-2900^\circ)$.

5. e) $\mathrm{tg}\, 600^\circ$; f) $\mathrm{tg}(-40^\circ)$; g) $\mathrm{ctg}\, 1305^\circ$; h) $\mathrm{ctg}(-300^\circ)$.

6. i) $\sec 1900^\circ$; k) $\sec(-2150^\circ)$; l) $\mathrm{cosec}\, 500^\circ$; m) $\mathrm{cosec}(-80^\circ)$.

7. a) $\sin(-7{,}3\pi)$; b) $\cos \frac{34}{9}\pi$; c) $\mathrm{tg}\left(-\frac{79}{11}\pi\right)$; d) $\mathrm{cosec}(-0{,}6\pi)$.

Să se calculeze:

8. a) $\sin(-1350^\circ)$; b) $\cos 720^\circ$; c) $\mathrm{tg}\, 900^\circ$; d) $\mathrm{ctg}(-450^\circ)$.

9. a) $\sin \frac{19}{6}\pi$; b) $\cos \frac{11}{2}\pi$; c) $\mathrm{tg}\, \frac{16}{3}\pi$; d) $\sec 9\pi$.

10. Să se exprime funcţiile trigonometrice ale unghiului de 50° prin funcţiile unghiului adiacent suplimentar lui.

Să se simplifice expresiile (în problemele 11—21):

11. $\sin(90^\circ+\alpha)+\cos(180^\circ-\alpha)+\mathrm{tg}(270^\circ+\alpha)+$ $+\mathrm{ctg}(360^\circ-\alpha)$.

12. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)+\mathrm{tg}(\pi-\alpha)-\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

13. $\sin^2(270^\circ-\alpha)+\sin^2(360^\circ-\alpha)$.

14. $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot \mathrm{tg}(2\pi-\alpha)$.

15. $a^2+b^2+2ab\cdot\cos(180^\circ-\alpha)$.

16. $\dfrac{\sin(-\alpha)\cdot \operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)\cdot \operatorname{ctg}(-\alpha)}$.

17. $\dfrac{\operatorname{cosec}(-\alpha)\cdot \operatorname{cosec}(90^\circ+\alpha)}{\sec(-\alpha)\cdot \sec(180^\circ+\alpha)}$. 18. $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cdot \sec\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot \sec(2\pi-\alpha)}$.

19. $\sin 160^\circ\cdot\cos 110^\circ+\sin 250^\circ\cdot\cos 340^\circ+\operatorname{tg} 110^\circ\cdot\operatorname{tg} 340^\circ$.

20. $\dfrac{\sin(90^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}132^\circ\cdot\operatorname{cosec}222^\circ\cdot\sin 90^\circ}{\cos(180^\circ+\alpha)\cdot\sec 312^\circ\cdot\operatorname{ctg}48^\circ\cdot\cos 180^\circ}$.

21. $\dfrac{\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)\cdot\sin 130^\circ\cdot\operatorname{cosec}220^\circ\cdot\sin 270^\circ}{\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)\cdot\cos 50^\circ\cdot\sec 320^\circ\cdot\cos 360^\circ}$.

22. Să se transforme funcţiile trigonometrice ale următoarelor unghiuri: a) $\alpha-90^\circ$; b) $\alpha-180^\circ$; c) $\alpha-270^\circ$; d) $\alpha-360^\circ$.

23. Să se determine $\cos x$ din ecvaţia:
$$3\sin^2(360^\circ-x)-7\sin(x-90^\circ)+3=0.$$

24. Să se afle $\sin x$, dacă $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

25. Să se afle $\operatorname{tg} x$ din ecvaţia:
$$\sin(2\pi-x)\cos(\pi-x)+\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)-\sin^2(2\pi-x)=0.$$

Să se rezolve ecvaţiile (în problemele 26 — 30):

26. $\sin^2(270^\circ-x)+2\cos(360^\circ-x)=3$.

27. $\sin(x-90^\circ)=-\sin(x-180^\circ)$.

28. $\cos(\pi+x)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

29. $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

30. $\sin(x+90^\circ)=-\operatorname{ctg}(360^\circ-x)$.

§ 9. Teorema adunării.

Sinusul şi cosinusul sumei şi diferenţei.

1. Să se calculeze $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$, cînd $\sin\alpha=0{,}625$ şi $\sin\beta=0{,}8$.

2. Să se descompună şi să se simplifice: a) $\sin(\alpha+60^\circ)+\sin(\alpha-60^\circ)$; b) $\cos(30^\circ+\alpha)-\cos(30^\circ-\alpha)$.

3. Se dă: $\cos\alpha=0{,}6$; $0<\alpha<90^\circ$. Să se afle $\sin(\alpha+30^\circ)$.

4. Se dă: $\sin\alpha=\sqrt{0{,}2}$; $0<\alpha<90^\circ$. Să se afle $\cos(60^\circ+\alpha)$.

5. Se dă: $\cos\alpha=0{,}5$; $\sin\beta=-0{,}4$; $270^\circ<\alpha<360^\circ$; $180^\circ<\beta<270^\circ$. Să se afle $\sin(\alpha-\beta)$ şi $\cos(\alpha+\beta)$.

6. Se dă: $\sin\alpha=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=-\frac{3}{4}$; α este în cvadrantul II, β în cvadrantul III. Să se afle $\sin(\alpha+\beta)$ şi $\cos(\alpha-\beta)$.

7. Să se afle $\sin(\alpha+\beta)$, cînd $\sin\alpha=0{,}6$ şi $\sin\beta=0{,}8$.

8. Unghiurile α şi β sînt pozitive ascuţite:
$$\cos\alpha=\frac{1}{7};\ \cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}.$$ Să se afle $\cos\beta$.

9. Să se calculeze: a) $\sin 75^\circ$ şi $\cos 75^\circ$, înlocuind 75° prin $45^\circ+30^\circ$; b) $\sin 15^\circ$ şi $\cos 15^\circ$, înlocuind 15° prin $45^\circ-30^\circ$.

10. Formulele care exprimă $\sin(\alpha\pm\beta)$ şi $\cos(\alpha\pm\beta)$ să se aplice pentru următoarele cazuri: a) $\alpha=0^\circ$; 90°; 180°; 270°; 360°; b) $\beta=90^\circ$; 180°; 270°; 360°; c) $\alpha=\beta$.

11. Cînd unghiurile α şi β sînt pozitive şi $\alpha+\beta<90^\circ$, atunci $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$. Să se demonstreze aceasta: 1) prin desen şi 2) prin formulă.

12. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ şi $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ să se exprime:

a) prin $\operatorname{tg}\alpha$ şi $\operatorname{tg}\beta$; b) prin $\operatorname{ctg}\alpha$ şi $\operatorname{ctg}\beta$.

13. Să se descompună $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ şi $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

14. Se dă: $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\sin\beta=\frac{12}{13}$; $\sin\gamma=\frac{7}{25}$, unde α, β, şi γ sînt unghiuri ascuţite. Să se afle $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ şi $\cos(\alpha+\beta-\gamma)$.

Tangenta sumei şi a diferenţei.

15. Să se descompună şi să se simplifice $\operatorname{tg}(45^\circ\pm\alpha)$.

16. Să se afle $\operatorname{tg}105^\circ$ $(=60^\circ+45^\circ)$.

17. Se dă: $\operatorname{tg}\alpha=3$; să se afle $\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$.

18. Se dă: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$ şi $\operatorname{tg}\beta=-2$. Să se afle $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ şi $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$.

19. Să se exprime $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$ prin $\operatorname{ctg}\alpha$ şi $\operatorname{ctg}\beta$.

20. Să se exprime $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)$: a) prin $\operatorname{ctg}\alpha$ şi $\operatorname{ctg}\beta$; b) prin $\operatorname{tg}\alpha$ şi $\operatorname{tg}\beta$.

21. Să se descompună $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$.

Să se simplifice următoarele expresii (în problemele 22—26):

22. $\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$. 23. $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

24. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$. 25. $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$.

26. $\frac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$.

Să se demonstreze identitățile (în problemele 27 — 37):

27. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

28. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

29. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta$.

30. $(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(\sin\beta-\cos\beta)=\sin(\beta-\alpha)-\cos(\beta+\alpha)$.

31. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta-\cos(\alpha+\gamma)\cdot\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta-$ $-\sin(\alpha+\gamma)\cdot\cos\gamma$.

32. a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; b) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

33. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{cosec}2\alpha$.

34. $\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

35. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

36. $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0$.

37. $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\cdot\sin\alpha)=\cos(60^\circ-\alpha)$.

38. Cînd $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ și $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, iar unghiurile α și β sînt ascuțite, atunci $\alpha+\beta=45^\circ$. Să se demonstreze aceasta.

39. Cînd α, β și γ sînt unghiuri ascuțite cu tangente de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ și $\frac{1}{8}$, atunci $\alpha+\beta+\gamma=45^\circ$. Să se demonstreze aceasta.

40. Se dă: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{7}$; α și β sînt unghiuri ascuțite. Să se demonstreze că $\alpha+\beta=135^\circ$.

Să se rezolve ecvațiile (în problemele 41 — 54):

41. $\sin(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=0$.

42. $\cos(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha-x)+0{,}75=\cos^2\alpha$.

43. $\cos(\alpha-\beta)\cdot\sin(\gamma-x)=\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin(\gamma+x)$.

44. $\operatorname{tg}(x+45^\circ)+\operatorname{tg}(x-45^\circ)=2\operatorname{ctg}x$.

45. $\sin(x+\alpha)+\sin(x-\alpha)=\cos\alpha$.

46. $\sin(\alpha-x):\cos(\alpha+x)=a:b$.

47. $\operatorname{tg}(x+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(x-\alpha)=m$.

48. $\sin 2x\cdot\cos x=\cos 2x\cdot\sin x$.

49. $\sin x\cdot\sin 2x=\cos x\cdot\cos 2x$.

50. $\cos 2x\cdot\cos 3x=\cos 5x$.

51. $\sin(\alpha+x)-\cos x\cdot\sin\alpha=\cos\alpha$.

52. $2\sin x=\sin(45^\circ-x)$.

53. $\sin(45^\circ-x)=\frac{1}{2}\cos(45^\circ+x)$.

54. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}$.

§ 10. Inmulțirea și împărțirea argumentului.

Formulele înmulțirii.

1. Să se calculeze: a) $\sin 2\alpha$ și $\cos 2\alpha$, cînd $\sin\alpha=0{,}8$; b) $\operatorname{tg}2\alpha$, cînd $\operatorname{tg}\alpha=-3$.

2. Intr'un triunghi isoscel sin unghiului dela bază este egal cu $\frac{5}{13}$; să se afle sin și cos unghiului dela vîrf.

3. Cînd $0<\alpha<45^\circ$, atunci $\sin 2\alpha<2\sin\alpha$. Să se demonstreze aceasta: 1) prin desen și 2) folosind formula pentru $\sin 2\alpha$.

4. Se dă: $\sin\alpha=0{,}8$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$. Să se afle $\sin 2\alpha$ și $\cos 2\alpha$.

5. Se dă: $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$; $270^\circ<\alpha<360^\circ$. Să se afle $\sin 2\alpha$ și $\cos 2\alpha$.

6. Se dă: $\operatorname{tg}\alpha=3$. Să se afle $\operatorname{tg}2\alpha$.

7. Să se exprime $\sin 2\alpha$ și $\cos 2\alpha$: a) numai prin $\sin\alpha$; b) numai prin $\cos\alpha$.

8. Să se exprime $\operatorname{ctg}2\alpha$: a) prin $\operatorname{ctg}\alpha$ și b) prin $\operatorname{tg}\alpha$.

9. Să se exprime $\sec 2\alpha$ prin $\sec\alpha$.

10. a) Să se exprime $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$ prin $\sin\frac{\alpha}{2}$ și $\cos\frac{\alpha}{2}$; b) să se exprime $\operatorname{tg}\alpha$ prin $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

11. Să se exprime $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$ prin $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

12. Să se arate că *toate* funcţiile trigonometrice ale unghiului α se exprimă *raţional* prin $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

13. Se dă: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$. Să se afle $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

14. Se dă: $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2} + 1$. Să se afle $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

15. Să se exprime $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ şi $\operatorname{tg} 3\alpha$ respectiv prin $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha$.

16. Să se exprime $\sin 4\alpha$ şi $\cos 4\alpha$ prin $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$.

Formulele împărţirii.

17. Să se calculeze $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ şi $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, cînd $180° < \alpha < 270°$ şi $\sin\alpha = -0{,}6$.

18. Să se afle sinusul, cosinusul, tangenta şi cotangenta unui unghi de 15°, presupunînd $15° = \frac{30°}{2}$. (Să se compare rezultatele obţinute cu cele din problema 9, § 9).

19. Să se afle sinusul, cosinusul, tangenta şi cotangenta unui unghi de $22°30'\left(=\frac{45°}{2}\right)$.

20. Intr'un triunghi isoscel cosinusul unghiului dela vîrf este egal cu $-\frac{7}{25}$; să se afle sinusul şi cosinusul unghiului dela bază.

21. Să se calculeze $\sin\frac{\alpha}{4}$, cînd $450° < \alpha < 540°$ şi $\sin\alpha = \frac{336}{625}$.

22. Să se calculeze $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$, cînd $45° < \frac{\alpha}{4} < 90°$ şi $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

23. Cînd $\cos\alpha = \frac{40}{41}$ şi $\cos\beta = \frac{60}{61}$, iar unghiurile α şi β sînt pozitive ascuţite, atunci $\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{41 \cdot 61}$. Să se verifice.

24. Să se verifice: $\operatorname{tg} 7°30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$.

25. Să se exprime $\sin\frac{\alpha}{2}$ şi $\cos\frac{\alpha}{2}$ prin $\sin\alpha$.

26. Să se exprime $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ şi $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ respectiv prin $\operatorname{tg}\alpha$ şi $\operatorname{ctg}\alpha$.

27. Să se afle $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, cînd $180° < \alpha < 270°$ şi $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

Să se demonstreze identităţile (în problemele 28—49):

28. a) $2\sin(90° - \alpha)\cdot\sin\alpha = \sin 2\alpha$; b) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha$.

29. a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$; b) $\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin\alpha$.

30. a) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha$; b) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha$.

31. $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta = 1$.

32. $\frac{\cos\alpha}{\sec\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\alpha$.

33. $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{4}\sin 2\alpha$.

34. a) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{cosec} 2\alpha$; b) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

35. a) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; b) $\sin 2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -\cos 2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$

36. $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

37. $\operatorname{tg}(\alpha + 45°) + \operatorname{tg}(\alpha - 45°) = 2\operatorname{tg} 2\alpha$.

38. $2\sin(45° + \alpha)\ \sin(45° - \alpha) = \cos 2\alpha$.

39. $\frac{1-\operatorname{tg}^2(45°-\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2(45°-\alpha)} = \sin 2\alpha$.

40. $\sin 3\alpha\operatorname{cosec}\alpha - \cos 3\alpha\cdot\sec\alpha = 2$.

41. $4\sin\alpha\cdot\sin(60° - \alpha)\cdot\sin(60° + \alpha) = \sin 3\alpha$.

42. $4\cos\alpha\cdot\cos(60° - \alpha)\cdot\cos(60° + \alpha) = \cos 3\alpha$.

43. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(60° - \alpha)\cdot\operatorname{tg}(60° + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$.

44. $\frac{\sin 3\alpha + \sin^3\alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$.

45. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2 60°}{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2 60°} = \operatorname{tg} 3\alpha\cdot 3\operatorname{ctg}\alpha$.

46. a) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; b) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

47. a) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; b) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

48. $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

49. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}(45° + \alpha)$.

50. Cînd $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{7}$ şi $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{3}$, iar unghiurile α şi β sînt ascuţite, atunci $\alpha + 2\beta = 45^\circ$. Să se demonstreze.

51. Cînd $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{7}$ şi $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$, atunci $\cos 2\alpha = \sin 4\beta$. Să se verifice.

Să se rezolve ecuaţiile (în problemele 52—74):

52. $\sin x \cdot \cos x = 0{,}25$. 53. $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$.

54. $1 - \mathrm{tg}^2 x = 2\,\mathrm{tg}\,x$. 55. $\sin 2x = \sin x$.

56. $a \cdot \sin x = b \cdot \cos\frac{x}{2}$. 57. $1 + \sin^2 2x = 4\sin^2 x$.

58. $\cos 2x = \cos x$. 59. $\cos 2x = 2\sin^2 x$.

60. $\mathrm{tg}\,2x = \mathrm{tg}\,x$. 61. $\mathrm{tg}\,2x = 3\,\mathrm{tg}\,x$.

62. $a(1 + \cos x) = b \cdot \cos\frac{x}{2}$.

63. $1 - \cos x = \sin\frac{x}{2}$. 64. $a(1 + \cos x) = b \cdot \sin x$.

65. $1 - \cos x = \sin x$. 66. $1 + \sec x = m \cdot \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}$.

67. $1 + \sec x = \mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}$. 68. $\sin 3x = 2\sin x$.

69. $\cos 3x = 4\cos^2 x$. 70. $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}$.

71. $\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x = \frac{3}{4}$.

In ecuaţiile 72—74 să se exprime $\sin x$ şi $\cos x$ mai întîi după formulele problemei 11:

72. $\sin x + \cos x = 1\frac{1}{4}$. 73. $4\sin x + 3\cos x = 2$.

74. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

§ 11. Transformarea unei sume algebrice a funcţiilor trigonometrice în produs. Unghiul auxiliar.

Să se reducă la o formă comodă pentru logaritmare şi să se simplifice:

1. a) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; b) $\sin 78^\circ - \sin 42^\circ$; c) $\cos 152^\circ + \cos 28^\circ$; d) $\cos 48^\circ - \cos 12^\circ$.

2. a) $\sin 5^\circ + \sin 20^\circ$; b) $\sin 3^\circ - \sin 5^\circ$; c) $\cos 3^\circ 15' + \cos 17^\circ$; d) $\cos 5^\circ - \cos 25^\circ$.

3. a) $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$; b) $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4. a) $\frac{\sin 25^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 25^\circ - \sin 15^\circ}$; b) $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$.

5. a) $\sin 20^\circ + \cos 40^\circ$; b) $\cos 20^\circ - \sin 20^\circ$; c) $\sin\alpha - \cos\beta$.

6. a) $\sin\alpha + \cos\alpha$; b) $\sin\alpha - \cos\alpha$.

7. a) $\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta$; b) $\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta$; c) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta$; d) $\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta$.

8. a) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha$; b) $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha$.

9. a) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; b) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$.

10. a) $\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta$; b) $\mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\beta$; c) $\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\beta$; d) $\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha$.

11. a) $1 + \sin\alpha$; b) $\sin\alpha - 1$; c) $1 - 2\sin^2\alpha$; d) $1 - 2\cos^2\alpha$.

12. $\sin\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha$. 13. $\mathrm{tg}\,\alpha - \sec\alpha$. 14. $\mathrm{cosec}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha$.

15. a) $1 \pm \mathrm{tg}\,\alpha$; b) $1 \pm \mathrm{ctg}\,\alpha$. 16. $1 \pm \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta$.

17. a) $\sqrt{1 + \cos\alpha} + \sqrt{1 - \cos\alpha}$; b) $\sqrt{1 + \cos\alpha} - \sqrt{1 - \cos\alpha}$.

18. $\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha + \sin\alpha} + \sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha - \sin\alpha}$.

19. a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \cos\beta$; b) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\beta \cdot \cos\beta$.

20. a) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$; b) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha$.

21. $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$.

22. a) $1 + \mathrm{tg}\,\alpha + \sec\alpha$; b) $\sec\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha - 1$.

23. a) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha$; b) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha$.

24. a) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha + \sec\alpha + \mathrm{cosec}\,\alpha$; b) $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha - \sec\alpha + \mathrm{cosec}\,\alpha$.

25. a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$; b) $\sin\alpha - \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$.

26. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

Să se demonstreze identităţile (în problemele 27—38):

27. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \mathrm{ctg}\,\frac{\beta - \alpha}{2}$. 28. $\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta} = \mathrm{ctg}(\alpha + \beta) \cdot \mathrm{tg}\,\beta$.

29. a) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$; b) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$.

30. $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \mathrm{tg}(45^\circ + \alpha)$. 31. $\frac{\sec\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{\sec\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha} = \mathrm{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$.

32. a) $\frac{\mathrm{tg}\,2\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha} = \sin 2\alpha$; b) $\frac{1}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,2\alpha} = \cos 2\alpha$.

33. $\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$ (cînd $0 < \alpha < 90^\circ$).

34. $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

35. a) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

b) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

36. a) $1 - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$;

b) $1 - \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$.

37. $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$.

38. $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Să se demonstreze că dacă $\alpha+\beta+\gamma=180°$ (de ex. pentru unghiurile triunghiului), au loc următoarele raporturi (în problemele 39—49. In răspunsuri sînt date îndrumări la aceste numere).

39. a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$;

b) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

40. a) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$;

b) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = -1 + 4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.

41. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

42. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma +$
$+ \operatorname{cosec}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\beta\cdot\operatorname{cosec}\gamma$.

43. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

44. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$.

45. $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma = 1$.

46. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

47. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

48. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

49. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

Să se transforme expresiile 50—59 pentru a fi calculate logaritmic cu ajutorul unor unghiuri simple:

50. $1+2\sin\alpha$. 51. $1-2\cos\alpha$. 52. $\sqrt{3}-2\sin\alpha$.

53. a) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$; b) $\sqrt{2}\cdot\sin\alpha-1$. 54. $3-4\sin^2\alpha$.

55. $3-4\cos^2\alpha$. 56. $1-3\operatorname{tg}^2\alpha$.

57. $3-\operatorname{ctg}^2\alpha$. 58. $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha$.

59. a) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$; b) $\cos\alpha-\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$.

60. Să se transforme cu ajutorul unghiului auxiliar:

1) $\sqrt{a^2+b^2}$, cînd $a>0$ şi $b>0$;

2) $\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, cînd $p>2\sqrt{q}>0$.

61. Presupunînd că $a>b>0$, să se transforme cu ajutorul unghiului auxiliar:

1) $\frac{a+b}{a-b}$; 2) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$; 3) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

62. Să se aplice unghiul auxiliar pentru a calcula:

$$x=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}.$$

Să se rezolve următoarele ecvaţii (63—75), transformînd suma sau diferenţa funcţiilor în produs:

63. $\sin 3x+\sin x=0$. 64. $\cos 4x+\cos x=0$.

65. $\sin 5x=\sin x$. 66. $\cos 2x=\cos x$.

67. $\cos 3x=\sin x$. 68. $\sin x+\cos x=1$.

69. $\cos x-\sin x=1:\sqrt{2}$. 70. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2(1+\sqrt{5})$.

71. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=2(1-\sqrt{2})$. 72. $\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} 4x=2$.

73. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x=\sec x\cdot\sec 3x$.

74. $\cos x+\cos 3x=\cos 2x$. 75. $\sin 3x=\sin 2x-\sin x$.

§ 12. Aplicarea tablelor de logaritmi pentru calcularea expresiilor trigonometrice şi aflarea unghiurilor.

Răspunsurile la problemele atît ale paragrafului de faţă cît şi ale §§ 13 şi 14 sînt date după tablele de cinci cifre. Putem folosi însă pentru rezolvarea lor şi tablele de 4 cifre, Pentru aceasta trebue să rotunjim şi numerele date şi cele obţinute la răspuns, lăsînd numai 4 cifre semnificative şi înlăturînd secundele. Trebue ţinut seamă că răspunsurile pot să difere uneori cu 1 — 2 unităţi de ultimul ordin.

Să se afle după table:

1. a) $\lg \sin 21°37'$; b) $\lg \sin 63°42'$; c) $\lg \sin 21°11'12''$; d) $\lg \sin 47°12'23''$; e) $\lg \sin 53°15''$; f) $\lg \sin 1°23'18''$.
2. a) $\lg \cos 32°8'$; b) $\lg \cos 50°22'$; c) $\lg \cos 44°53'36''$; d) $\lg \cos 62°47'25''$; e) $\lg \cos 30°48''$; f) $\lg \cos 89°36'20''$.
3. a) $\lg \operatorname{tg} 27°41'$; b) $\lg \operatorname{tg} 16°7'35''$; c) $\lg \operatorname{tg} 70°42'53''$; d) $\lg \operatorname{tg} 14°15''$; e) $\lg \operatorname{tg} 52'12''$; f) $\lg \operatorname{tg} 89°10'16''$.
4. a) $\lg \operatorname{ctg} 80°53'$; b) $\lg \operatorname{ctg} 20°26'48''$; c) $\lg \operatorname{ctg} 77°21'13''$; d) $\lg \operatorname{ctg} 45°36''$; e) $\lg \operatorname{ctg} 87°59'34''$; f) $\lg \operatorname{ctg} 15'40''$.

Să se afle unghiul ascuţit cînd se dă:

5. $\lg \sin x =$ a) 9,40006—10; b) 9,86342—10; c) 9,67466—10; d) 9,93410—10; e) 9,87114—10; f) 7,86616—10.
6. $\lg \cos x =$ a) 9,86152—10; b) 8,93007—10; c) 9,94970—10; d) 9,84932—10; e) 9,80800—10; f) 8,05840—10.
7. $\lg \operatorname{tg} x =$ a) 8,78649—10; b) 0,00657; c) 9,46075—10; d) 0,07710; e) 0,00015; f) 7,35000—10.
8. $\lg \operatorname{ctg} x =$ a) 1,03675; b) 9,50180—10; c) 0,37380; d) 9,33875—10; e) 9,99995—10; f) 8,00000—10.

Să se calculeze cu ajutorul logaritmilor:

9. a) $\sin 20°$; b) $\cos 47°36'28''$; c) $\operatorname{tg} 75°36''$; d) $\operatorname{ctg} 15'$; e) $\sec 40°$; f) $\operatorname{cosec} 53°2'43''$.
10. a) $\sin 230°$; b) $\cos 740°$; c) $\operatorname{tg}(-250°10')$; d) $\operatorname{ctg} 1000°15'20''$; e) $\sec(-100°)$; f) $\operatorname{cosec} 500°20'45''$.

Să se afle unghiul ascuţit cînd se dă:

11. a) $\sin x = \frac{4}{7}$; b) $\cos x = 0{,}38934$; c) $\operatorname{tg} x = 4$; d) $\operatorname{ctg} x = 10$; e) $\sec x = 1{,}5$; f) $\operatorname{cosec} x = 2{,}65047$; g) $\sin x = \frac{1}{2} \sin 20°$; h) $\operatorname{ctg} x = 3 \operatorname{ctg} 48°$.

Să se afle unghiurile, care se cuprind între 0° şi 360°, cînd se dă:

12. $\sin x = \frac{5}{11}$. 13. $\sin x = -0{,}682$. 14. $\cos x = 0{,}76213$.
15. $\cos x = -0{,}5688$. 16. $\operatorname{tg} x = \frac{176}{353}$. 17. $\operatorname{tg} x = -2{,}48$.
18. $\operatorname{ctg} x = 5$. 19. $\operatorname{ctg} x = -0{,}731$. 20. $\sec x = 15$.
21. $\sec x = -2{,}5$. 22. $\operatorname{cosec} x = 10$. 23. $\operatorname{cosec} x = -1\frac{2}{7}$.

Să se afle valoarea lui x cu cea mai mică mărime absolută (pozitivă sau negativă, dacă mărimea lui absolută este mai mică) în problemele 24—31:

24. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 70°$. 25. $\operatorname{ctg} x = 1 + \sin 23°14'48''$.
26. $\cos x = 1 - \operatorname{ctg} 66°12'$. 27. $\sin x = \sin 37°15' - 1$.
28. $\cos x = 1 + \operatorname{tg} 117°$. 29. $\operatorname{tg} x = \sin 44° + \cos 166°$.
30. $\operatorname{ctg}(-x) = 1 - \cos(-20°) \cdot \sec 70°46'$.
31. $\sin(x + 180°) = \sqrt[3]{-\operatorname{tg} 152°28''}$.

Să se calculeze următoarele expresii (în problemele 32—34):

32. $(a^2 - b^2) \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$, cînd $a = 7{,}3862$; $b = 5{,}2138$; $\alpha = 42°26'$; $\beta = 68°34'45''$.
33. $(a + \sin \alpha) \cdot (a + \cos \alpha)$, cînd $a = 0{,}00105$ şi $\alpha = 143°12'18''$.
34. $a^2 \cdot \sec \alpha \cdot \sqrt[4]{-\operatorname{tg} 2\alpha}$, cînd $a = 0{,}020438$ şi $\alpha = 67°34'30''$.

Să se calculeze următoarele expresii (în problemele 35—41), transformîndu-le mai întîi în produs:

35. $x = \pi \cdot (\sin 30°53'30'' + \sin 80°24')$.
36. $x = \frac{\sqrt[3]{0{,}0001}}{\cos 16°41'25'' - \sin 49°10'35''}$.
37. $x = \left(16\frac{768}{815}\right)^2 \cdot (1 + \sin 11°7'20'')$.
38. $x = \sqrt{2} \cdot (1 - \operatorname{tg} 61°38'42'')$.
39. $x = \sqrt[4]{0{,}005} \cdot (1 + 2 \sin 41°19')$.
40. $x = (2{,}7148)^3 \cdot \sqrt{3 - 4\cos^2 72°5'}$.

41. $x = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha}$, cînd $a = 0{,}014806$; $b = 0{,}003984$, $\alpha = 56°15'24''$.

Rezolvarea triunghiurilor dreptunghe.

42 — 57. Cazurile fundamentale de rezolvare a triunghiurilor dreptunghe.

I. Se dă ipotenuza și un unghi ascuțit:
42. $c = 9{,}35$; $A = 65°14'$.
43. $c = 627$; $A = 23°30'$.
44. $c = 0{,}79792$; $A = 66°36'24''$. 45. $c = 3{,}6435$; $A = 50°0'12''$.

II. Se dă o catetă și un unghi ascuțit:
46. $a = 6{,}37$; $A = 4°35'$. 47. $a = 18{,}003$; $B = 43°$.
48. $b = 0{,}1738$; $A = 35°55'24''$.
49. $b = 0{,}29544$; $B = 25°37'48''$.

III. Se dă ipotenuza și o catetă:
50. $c = 65$; $a = 16$. 51. $c = 113$; $b = 15$.
52. $c = 697$; $a = 528$. 53. $c = 1710{,}2$; $b = 823$.

IV. Se dă ambele catete:
54. $a = 261$; $b = 380$. 55. $a = 156$; $b = 133$.
56. $a = 0{,}097836$; $b = 0{,}10003$.
57. $a = 12{,}007$; $b = 6{,}9194$.

58 — 69. Triunghiul isoscel.

Insemnări: $a = c$ înseamnă latura laterală; b înseamnă baza; $A = C$ înseamnă unghiul dela bază; B înseamnă unghiul dela vîrf; h înseamnă înălțimea; h_1 înseamnă înălțimea laterală; $2p$ înseamnă perimetrul; S înseamnă suprafața.

Să se rezolve un triunghi isoscel cînd se dă:
58. $a = 797{,}92$; $A = 66°36'24''$. 59. $a = 627$; $B = 133°$.
60. $b = 15{,}658$; $A = 59°45'20''$. 61. $b = 5{,}529$; $B = 51°11'$.
62. $a = 8{,}757$; $b = 13{,}958$. 63. $b = 925{,}22$; $h = 721{,}4$.
64. $A = 65°40'$; $h_1 = 20$. 65. $b = 130{,}72$; $S = 1955{,}8$.
66. $B = 73°0'14''$; $S = 45{,}038$.
67. $2p = 40{,}65$; $A = 72°46'38''$.
68. $S = 250$; $a : b = 7 : 4$. 69. $S = 56$; $a = 14$.

§ 13. Rezolvarea triunghiurilor oblicunghe prin aplicarea logaritmilor.

Insemnări: a, b și c sînt laturile triunghiului; A, B și C sînt unghiurile opuse lor; S suprafața; $2p$ perimetrul; R raza cercului circumscris; r raza cercului înscris; h_a, l_a și m_a sînt înălțimea, bisectrița și mediana, care corespund laturii a.

Cazurile fundamentale de rezolvare ale triunghiurilor oblicunghe.

I. Se dă o latură și două unghiuri:
1. $a = 370$; $B = 86°3'$; $C = 50°55'36''$.
2. $a = 450$; $A = 87°55'$; $B = 10°52'51''$.
3. $a = 951$; $B = 126°43'$; $C = 13°41'8''$.
4. $a = 97{,}515$; $A = 102°48'$; $C = 21°6'$.
5. $b = 13{,}024$; $A = 11°48'45''$; $B = 133°42'15''$.
6. $c = 15{,}948$; $A = 51°38'31''$; $B = 18°19'29''$.

II. Se dă două laturi și un unghi între ele:
7. $a = 510$; $b = 317$; $C = 76°18'52''$.
8. $a = 225$; $b = 800$; $C = 36°44'$.
9. $a = 2{,}296$; $c = 1{,}687$; $B = 29°51'46''$.
10. $b = 28$; $c = 42$; $A = 124°$.
11. $a = 30{,}986$; $c = 69{,}014$; $B = 87°47'16''$.
12. $b = 40{,}326$; $c = 32{,}114$; $A = 73°40'$.

III. Se dă două laturi și unghiul opus uneia din ele:
13. $a = 87$; $b = 65$; $A = 75°45'$.
14. $a = 34$; $b = 93$; $A = 14°15'$.
15. $a = 24$; $b = 83$; $A = 26°45'$.
16. $b = 360$; $c = 309$; $C = 21°14'25''$.
17. $a = 13{,}897$; $c = 8{,}425$; $A = 126°42'36''$.
18. $a = 0{,}4366$; $b = 1{,}2987$; $B = 11°3'20''$.
19. $a = 13{,}807$; $c = 8{,}136$; $C = 14°36'32''$.
20. $b = 263{,}09$; $c = 215{,}4$; $B = 70°14'42''$.
21. $a = 19{,}058$; $b = 28{,}193$; $A = 31°16'47''$.
22. $a = 457{,}08$; $b = 169{,}93$; $B = 21°49'45''$.
23. $a = 2579{,}8$; $c = 10$; $A = 130°21'35''$.

IV. Se dă trei laturi:

24. $a = 19$; $b = 34$; $c = 49$.
25. $a = 89$; $b = 321$; $c = 395$.
26. $a = 44$; $b = 483$; $c = 485$.
27. $a = 0{,}099$; $b = 0{,}101$; $c = 0{,}158$.
28. $a = 172{,}5$; $b = 1134{,}7$; $c = 1205{,}4$.
29. $a = 421{,}63$; $b = 409{,}87$; $c = 335{,}94$.
30. $a = 1{,}2345$; $b = 2{,}3456$; $c = 3{,}4567$.

Cazuri particulare de rezolvare a triunghiurilor oblicunghe.

31. $R = 7{,}9235$; $A = 113°17'$; $B = 48°16'44''$.
32. $S = 501{,}97$; $A = 15°28'40''$; $B = 45°23''$.
33. $h_a = 5{,}3708$; $B = 115°10'27''$; $C = 5°8'33''$.
34. $l_a = 0{,}75868$; $B = 98°31'$; $C = 4°25'$.
35. $a + b = m = 488{,}8$; $A = 70°24'$; $B = 40°16'$.
36. $a - b = n = 23$; $A = 108°$; $B = 18°$.
37. $h_a + h_b = m = 1{,}3807$; $A = 102°32'40''$; $B = 58°17'20''$.
38. $h_b - h_c = n = 60{,}8$; $B = 46°23'51''$; $C = 80°28'23''$.
39. $2p = 420{,}76$; $A = 24°37'4''$; $B = 52°30'56''$.
40. $r = 5$; $A = 22°37'10''$; $B = 39°18'28''$.
41. $c = 1{,}2304$; $a : b = 3 : 4$; $B = 48°$.
42. $a = 63{,}516$; $b : c = 9 : 11$; $A = 95°30'$.
43. $c = 226{,}88$; $h_c : b = 63 : 65$; $B = 17°4'$.
44. $a = 15{,}988$; $A = 46°20'35''$; $b = a_c$ (a_c este proecția a pe c).
45. $b = 29$; $l_c = 31$; $A = 68°43'$.
46. $S = 2423{,}4$; $a = 42{,}5$; $B = 124°38'$.
47. $a = 32$; $b = 25$; $A = 2B$.
48. $a + b = 36{,}5$; $R = 19{,}063$; $A - B = 19°31'18''$.
49. $a + b = m = 2147$; $c = 353$; $C = 13°41'8''$.
50. $a - b = n = 6{,}457$; $c = 18{,}309$; $C = 53°40'$.
51. $a + b = m = 14{,}317$; $c = 5{,}189$; $A = 102°38'$.
52. $a - b = n = 6{,}232$; $c = 15{,}146$; $A = 78°40'$.
53. $S = 15$; $ab = 48$; $\sin A = \cos B$.
54. $h_b = 60$; $h_c = 36$; $a : R = \cos A$.

55. $a = 23$; $b = 45$; $R = 25{,}098$.
56. $a = 120$; $b = 29$; $h_c = 23{,}762$.
57. $a = 6$; $b = 8$; $S = 12$.
58. $b = 98$; $c = 76$; $m_c = 68$. 59. $a = 20$; $b = 12$; $m_c = 14$.
60. $h_a = 8$; $h_b = 12$; $h_c = 18$.
61. $b = 42$; $c = 28$; $l_a = 12{,}809$.

§ 14. Ecvații trigonometrice.

Să se determine valoarea lui x din ecvațiile 1—12: 1) *sub forma generală* și 2) în limitele dela 0° pînă la 360° (de la 0 pînă la 2π):

1. $3\sin x = 2\cos^2 x$.
2. $\sin x = \operatorname{ctg} x$.
3. $3 + 2\cos x = 4\sin^2 x$.
4. $\sin x = -\cos x$.
5. $\operatorname{tg} x = 3\operatorname{ctg} x$.
6. $\operatorname{tg} x = 2\sin x$.
7. $\operatorname{ctg} x = 3\cos x$.
8. $\operatorname{cosec} x = 2\sin x$.
9. $\sin 3x = 0{,}5$.
10. $\operatorname{ctg} \frac{2x}{5} = 1$.
11. $3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} = 1$.
12. $2\sin\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

13. Să se afle dependența dintre unghiurile α și β în următoarele cazuri:

1) $\sin\alpha = \sin\beta$; 2) $\cos\alpha = \cos\beta$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$; 5) $\sin\alpha = -\sin\beta$; 6) $\cos\alpha = -\cos\beta$; 7) $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}\beta$; 9) $\sin\alpha = \cos\beta$; 10) $\sin\alpha = -\cos\beta$; 11) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$; 12) $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\beta$.

Să se rezolve ecvațiile (14—73):

14. $\operatorname{ctg} 10x = 0$.
15. $(\cos x)^{\sin x} = 1$.
16. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$.
17. $a(\sin x + \cos x)^2 = b\sin 2x$.
18. $\operatorname{tg} px + \operatorname{tg} qx = 0$.
19. $\sin 3x = -\cos x$.
20. $\sin 5x \cdot \operatorname{tg} 4x \cdot \cos 2x = 0$.
21. $a\sin x + b\cos x = 0$.
22. $\sin x + \cos x = \operatorname{cosec} x$.
23. $5\cos 2x = 4\sin x$.
24. $\cos\frac{x}{2} + \cos x = 1$.

25. $\sin(m+x)+\sin x=\cos\frac{m}{2}$.

26. $\sin 3x+\sin 2x+\sin x=0$.

27. $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}+\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}=2{,}5$.

28. $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=\sqrt{a^2+b^2}$.

29. $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c$. 30. $2\sin x-9\cos x=7$.

31. $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$.

32. $14{,}36\sin x+23\cos x=26{,}02$.

33. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$. 34. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2$.

35. $\sec x=\sin x+\cos x$.

36. $\sin x+\cos x=\sec x+\operatorname{cosec} x$.

37. $\frac{\cos x}{1+\sin x}=2-\operatorname{tg} x$. 38. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\sec 80°$.

39. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

40. $(4-\sqrt{3})(\sec x+\operatorname{cosec} x)=4(\sin x\cdot\operatorname{tg} x+$
$+\cos x\cdot\operatorname{ctg} x)$.

41. $\sin(x+30°)\cdot\sin(x-30°)=\sin 30°$.

42. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}(45°+x)=2$.

43. $\cos(a-b)\cdot\sin(c-x)=\cos(a+b)\cdot\sin(c+x)$.

44. $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg}(x-45°)\cdot\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}(x+45°)$.

45. $\sec^2 x+3\sec x\cdot\operatorname{cosec} x+\operatorname{cosec}^2 x=4$.

46. $\operatorname{tg} 3x=\sin 6x$.

47. $\sqrt{2}\cdot\cos 2x=\cos x+\sin x$.

48. $4\sin^2 x+\sin^2 2x=3$. 49. $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$.

50. $\sin^2 2x-\sin^2 x=\sin^2 30°$.

51. $\cos 4x+\cos 2x+\cos x=0$.

52. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.

53. $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=a\cdot\sin 2x-b\cdot\cos 2x$.

54. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$.

55. $\operatorname{ctg}(\pi-3x)=\operatorname{tg}(x-\pi)$. 56. $\cos\frac{x}{2}+\cos x=1$.

57. $\operatorname{cosec} x=\operatorname{cosec}\frac{x}{2}$.

58. $\sec^2\frac{x}{2}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}=16\operatorname{ctg} x$.

59. $8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=1+\sec x$. 60. $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=1+\sin 2x$.

61. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$.

62. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x=0$.

63. $\cos x\cdot\cos 3x=\cos 5x\cdot\cos 7x$.

In ecvațiile 64—73 expresiile date trebue prealabil simplificate (altfel se vor obține rădăcini străine):

64. $\frac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}=0$. 65. $\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=0$.

66. $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} 2x=0$. 67. $\sin 3x\cdot\operatorname{ctg} x=0$.

68. $\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{\cos x}{\cos 2x}$. 69. $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$.

70. $\frac{1-\cos 2x}{2\sin x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$.

71. $\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} 2x=2$.

72. $\sin 3x\cdot\operatorname{tg} 2x\cdot\sec x=0$.

73. $3\sin x=1-\sqrt{3\cos^2 x-2}$.

Să se rezolve sistemele de ecvații (74—95):

74. Să se afle $\sin x$ și $\sin y$, dacă $\sin x+\sin y=0{,}2$ și $\cos x+\cos y=-0{,}2$.

75. Să se afle $\cos x$ și $\cos y$ din sistemele:

$$\cos(x+y)=\tfrac{1}{6}(1-2\sqrt{6});\quad \cos(x-y)=\tfrac{1}{6}(1+2\sqrt{6}).$$

76. Să se afle $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{tg} y$, dacă $x+y=45°$ și $\operatorname{tg} x+$
$+\operatorname{tg} y=10$.

77. Să se exprime x prin a, b și φ cu ajutorul sistemelor:

$$a=x\cdot\sin\alpha;\quad b=x\cdot\sin\beta;\quad \alpha+\beta=\varphi.$$

78. Să se afle x și y, dacă $\sin(x-y)=\cos(x+y)=\frac{1}{2}$.

Să se afle unghiurile *ascuțite* în următoarele sisteme (79—95):

79. $\sin x\cdot\cos y=0{,}36$; $\cos x\cdot\sin y=0{,}14$.

80. $\sin x\cdot\sin y=0{,}36$; $\cos x\cdot\cos y=0{,}14$.

81. $x+y=\alpha$; $\sin x+\sin y=a$.

82. $x+y=77°$; $\cos x-\cos y=0{,}4898$.

83. $x+y=\alpha$; $\sin x\cdot\sin y=a$.

84. $x-y=48°20'$; $\cos x\cdot\cos y=0{,}48967$.

85. $x+y=\alpha;\ \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{m}{n}.$

86. $x+y=96^\circ 38';\ \frac{\cos x}{\cos y}=\frac{5}{3}.$

87. $x+y=\alpha;\quad \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=a.$

88. $x-y=31^\circ;\quad \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=0{,}74.$

89. $x+y=\alpha;\quad \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=a.$

90. $x-y=5^\circ;\quad \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=0{,}8391.$

91. $x+y=a;\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=\frac{m}{n}.$

92. $x-y=3^\circ 46';\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=\frac{11}{9}.$

93. $2^{\sin x+\cos y}=1;\quad 16^{\sin^2 x+\cos^2 y}=4.$

94. $x+y+z=180^\circ;\quad \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=2;\quad \operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} z=3.$

95. $x+y+z=180^\circ;\quad \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=3;\quad \operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} z=14.$

§ 15. Funcţii inverse circulare.

(Vezi deasemenea § 2, №№ 32—36).

Indrumare. La rezolvarea acestor probleme, trebue să ţinem seamă de limitele arcusurilor luate şi să lăsăm la o parte, ca *străine*, acele răspunsuri din cele obţinute, care nu corespund acestor limite.

Să se afle valoarea următoarelor expresii (1 — 16):

1. 1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arc\,sec} 2$; 3) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. 1) $\sin\left(\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

   3) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$.

3. 1) $\operatorname{ctg}[\operatorname{arc\,tg}(-1)]$; 2) $\sin\left(3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

   3) $\mathrm{eos}\left[2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$.

4. 1) $\cos(\operatorname{Arc\,cos} x)$; 2) $\sin\left(\operatorname{Arc\,tg}\frac{3}{4}\right)$; 3) $\sin[\operatorname{arc\,tg}(-2)]$.

5. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3})$

6. 1) $\operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{5}\right)$; 2) $\operatorname{Arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$; 3) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

7. 1) $\sin(\arccos 0{,}8)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

8. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)$;

   2) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

9. 1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} 2+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)$.

10. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}\right)$.

11. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)$.

12. $\cos\left(\arccos\frac{9}{\sqrt{82}}+\operatorname{arc\,cosec}\frac{\sqrt{41}}{4}\right)$.

13. $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{7}\right)$.

14. $\sin(2\arcsin m)$.

15. $\operatorname{tg}\left(3\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}\right)$.

16. $\sin(2\operatorname{arc\,tg} m)$.

Să se verifice justeţea următoarelor egalităţi (17 — 31):

17. a) $\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{4}{5}$; b) $\arcsin\sqrt{\frac{a}{a+b}}=$

    $=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{b}}.$

18. $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}.$

19. $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{7}=\arccos\left(-\frac{11}{14}\right).$

20. $\arcsin 0{,}6-\arcsin 0{,}8=-\arcsin 0{,}28.$

21. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}.$

22. $\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,ctg}\frac{3}{4}=\frac{3\pi}{4}.$

23. $2\arccos a=\arccos(2a^2-1).$

24. $2\arcsin m=\arccos(1-2m^2).$

25. $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{32}{43}.$

26. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$

27. $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{a}} = \operatorname{arc} \cos \frac{a-x}{a+x}$.

28. $\operatorname{arc} \sin \frac{4}{5} + \operatorname{arc} \cos \frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{2}{11}$.

29. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} m + \operatorname{arc} \operatorname{tg} n = \operatorname{arc} \cos \frac{1 - mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$.

30. $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sqrt{3} + \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}$.

31. $\operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{2}+1)^2$.

Să se rezolve ecvațiile (32 — 44):

32. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (1+x) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (1-x) = \frac{\pi}{4}$.

33. $\operatorname{arc} \cos (x-1) = 2 \operatorname{arc} \cos x$.
34. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

35. $\operatorname{arc} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x-1)$.
36. $\operatorname{arc} \sin 2x = 3 \operatorname{arc} \sin x$.

37. $x = \operatorname{arc} \sin (\cos x)$.
38. $2x = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} (\operatorname{tg} x)$.

39. $\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$.

40. $\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin x\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$.

41. $\operatorname{arc} \cos x + \operatorname{arc} \cos (1-x) = \operatorname{arc} \cos (-x)$.

42. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x = \frac{\pi}{2}$.

43. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x+1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a$.

44. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sec 5x = \frac{\pi}{4}$.

PROBLEME DE GEOMETRIE, CARE CER APLICAREA TRIGONOMETRIEI.

§ 15*a. Geometria plană.

Poligoane regulate.

1*. Să se calculeze latura b a unui poligon circumscris regulat de n laturi, cunoscînd latura a a poligonului înscris regulat de n laturi.

2*. Să se calculeze lungimea diagonalelor unui poligon regulat de 7 laturi, dacă latura lui e de 10 cm.

3*. Să se determine diagonala cea mai mică a unui poligon regulat de n laturi, dacă latura lui e de a cm.

4*. Să se determine diagonala cea mai mare a unui poligon regulat de n laturi, dacă lungimea laturii lui e de a m, avînd în vedere două cazuri: 1) cînd n este un număr pereche; 2) cînd n este un număr nepereche.

Suprafața figurilor rectilinii.

5*. Diagonalele unui dreptunghi formează la punctul lor de întretăiere un unghi de 75°22′; suprafața dreptunghiului este de 562 m^2. Să se determine laturile dreptunghiului.

6*. Un cerc cu raza r e înscris într'un romb cu unghiul ascuțit α. Să se determine suprafața rombului ($r = 5$; $\alpha = 36°47'$)

7*. Suprafața unui triunghi isoscel este Q, unghiul lui dela vîrf este β. Să se afle înălțimea ($Q = 450$; $\beta = 73°$).

8*. Suprafața unui triunghi isoscel este de Q m^2, baza este de b m. Să se determine unghiul dela vîrf ($Q = 1956$; $b = 130{,}7$).

9*. Să se determine suprafața unui poligon regulat de n laturi, dacă latura lui este de a dm: 1) $n = 7$; $a = 20$; 2) $n = 8$; $a = 1$; 3) $n = 12$; $a = 10$.

10*. Să se calculeze suprafaţa unui poligon regulat de n laturi, înscris într'un cerc cu raza R: 1) $n = 12$; $R = 7$; 2) $n = 5$; $R = 7$.

11*. Să se calculeze suprafaţa unui poligon regulat de n laturi, circumscris unui cerc cu raza R.

12*. Bazele unui trapez sînt de 25 *cm* şi 15 *cm*; o latură a lui este de 12 *cm*; unghiul dintre latura dată şi baza cea mai mare este de 50°. Să se calculeze suprafaţa trapezului.

13*. Un lot de pămînt de formă pentagonală a fost măsurat de un hotarnic prin modul aşa numit polar (fig. 18). Din punctul O (pol) au fost măsurate distanţele $OA = 43\,m$, $OB = 36\,m$, $OC = 41\,m$, $OD = 56\,m$ şi $OE = 34\,m$ şi unghiurile: $\angle AOB = 65°30'$; $\angle BOC = 71°20'$; $\angle COD = 80°$ şi $\angle DOE = 61°35'$. Să se calculeze suprafaţa lotului.

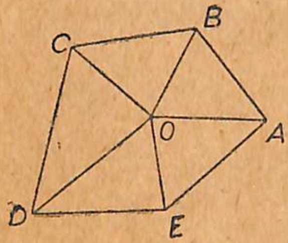


Fig. 18.

14*. Să se determine suprafaţa unui trapez isoscel, a cărui diagonală este a şi formează cu bazele unghiul α.

15*. Latura unui exagon regulat este de 84 *cm*; să se calculeze latura unui poligon regulat de 7 laturi echivalent cu acel exagon.

16*. Două poligoane regulate, unul de 9 laturi şi altul de 10 laturi, au perimetrele egale. Să se calculeze raportul dintre suprafeţele acestor poligoane.

Suprafaţa părţilor de cerc.

17*. Să se calculeze suprafaţa unui sector, dacă raza lui e de 8 *cm*, iar raza cercului înscris în el este de 2 *cm*.

18*. Să se determine suprafaţa unui segment de cerc, avînd cunoscute raza r şi arcul α: 1) $r = 4{,}731$; $\alpha = 46°44'$; 2) $r = 12$; $\alpha = 29°38'$.

19*. O coardă de a *cm* lungime împarte în 2 segmente un cerc cu raza de R *cm*. Să se afle suprafaţa segmentului mai mic ($a = 3{,}5$; $R = 6{,}2$).

20*. Intr'un cerc cu raza de R *cm* s'a tras două coarde paralele, astfel încît fiecare subîntinde un arc de α grade. Să se afle suprafaţa părţii de cerc cuprinse între coarde.

Probleme mixte.

21*. O semicirconferinţă e împărţită în raportul 4 : 7 şi din punctul împărţirii e coborîtă o perpendiculară pe diametru. Să se determine segmentele diametrului, dacă lungimea lui e de 11 *cm*.

22*. Intr'un paralelogram se dă un unghi ascuţit α şi distanţele a şi b dela punctul de întretăere al diagonalelor pînă la laturile inegale. Să se determine diagonalele şi suprafaţa paralelogramului.

23*. Să se calculeze suprafaţa cuprinsă între trei cercuri cu razele de 1 *m*, 2 *m* şi 3 *m*, tangente unul la altul.

24*. Să se afle un unghi ascuţit al unui romb, în care latura este media proporţională între diagonale.

§ 16. Drepte şi planuri.

Perpendiculara şi oblica pe plan.

1. Un unghi, format de o perpendiculară şi o oblică, duse din punctul M pe planul P, este egal cu α. Lungimea oblicii este egală cu a. Să se afle distanţa dintre punctul M şi planul ($a = 11{,}22$; $\alpha = 72°54'$).

2. Pe un plan s'a ridicat o perpendiculară de p lungime; din baza ei, luată ca centru, s'a descris în plan o circonferinţă cu raza r. Să se afle unghiul între perpendiculară şi dreapta care uneşte vîrful ei cu un oricare punct de pe circonferinţă ($p = 4{,}54$; $r = 8$).

3. Prin centrul O al unui pătrat cu latura $AB = a = 30$ s'a dus o perpendiculară pe planul pătratului; pe perpendiculară s'a luat un segment $OM = d = 20$ şi din punctul M s'a dus o perpendiculară MC pe AB. Să se calculeze unghiul x dintre MC şi proecţia ei OC pe planul pătratului.

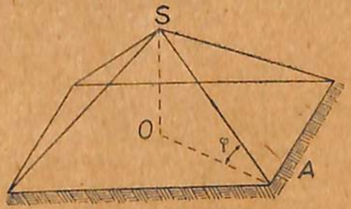


Fig. 19.

4. Muchia unui cub este $a = 10\,cm$. Să se calculeze unghiul inclinării diagonalei cubului pe faţa lui.

5. Deasupra unei gropi de silos trebue făcut un acoperiş de forma unei piramide patruunghiulare regulate. Latura bazei este de 6,5 *m*. Inălţimea acoperişului trebue să fie de

2,5 *m*. Să se determine lungimea căpriorului SA şi unghiul inclinării lui pe planul bazei (fig. 19).

6. Inălţimea unei piramide patruunghiulare regulate este de 7 *cm*, latura bazei este de 8 *cm*. Care este unghiul inclinării muchiei laterale pe planul bazei?

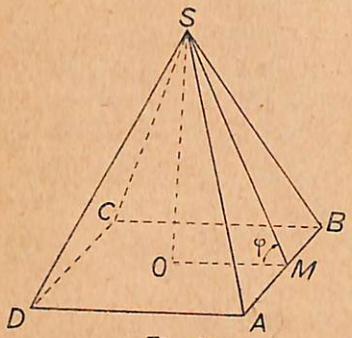


Fig. 20.

7. O şatră are forma unei piramide patruunghiulare regulate şi e construită din patru nuele învelite cu o brezentă (fig. 20). Inălţimea şatrei SO este de 2,4 *m*; distanţa între bazele a două nuele mai apropiate $AB = 2\,m$. Să se determine distanţa SM dela vîrful şatrei pînă la mijlocul laturii bazei, adică apotema piramidei, şi unghiul inclinării pe suprafaţa orizontală a pămîntului.

8. Din centrul O al unui triunghi regulat ABC cu latura a, s'a ridicat o perpendiculară; pe perpendiculară s'a luat un punct M, astfel că segmentul $MA = a$; din punctul M s'a dus apoi segmentul $MD \perp AC$. Să se calculeze unghiul φ dintre MD şi planul triunghiului ABC.

9. O oblică formează cu planul un unghi α; prin vîrful acestui unghi s'a dus pe planul dat o altă dreaptă, care formează unghiul β cu proecţia planului inclinat. Să se determine unghiul dintre aceste drepte ($\alpha = 43°53'$; $\beta = 11°10'$).

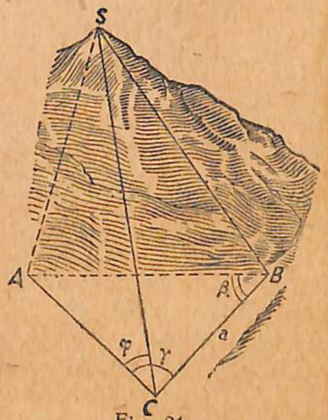


Fig. 21.

10. O dreaptă situată în exteriorul unui plan întretae a doua dreaptă situată în plan şi formează cu ea unghiul α, iar a doua dreaptă formează unghiul β cu proecţia primei drepte pe plan. Să se determine unghiul dintre prima dreaptă şi planul ($\alpha = 8°26'$; $\beta = 5°40'$).

11. Din centrul unei circonferinţe circumscrise unui triunghi cu laturile a, b şi c s'a ridicat pe planul acestui tri-

unghi o perpendiculară h. Să se determine unghiurile formate de acest plan şi dreptele care unesc vîrful perpendicularei cu vîrfurile triunghiului ($h = 60$; $a = 30$; $b = 5$; $c = 29$).

12. Un segment de drum drept BC lung de a metri se află într'un plan orizontal. Alăturea de drum se găseşte un munte, al cărui vîrf se vede din punctul C sub un unghi φ (fig. 21). Vîrful S se proectează pe planul drumului în punctul A. Segmentul BC formează cu razele, duse din capetele lui în punctul A, unghiurile: $\angle ACB = \gamma$ şi $\angle ABC = \beta$. Să se determine înălţimea muntelui ($a = 400$; $\beta = 40°10'$; $\gamma = 60°40'$; $\varphi = 50°50'$).

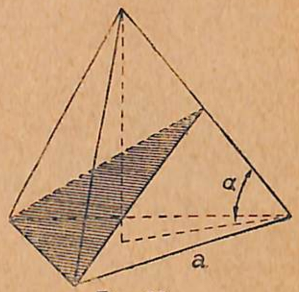


Fig. 22.

13. Intr'o piramidă triunghiulară regulată, latura bazei este egală cu a, iar muchia laterală formează cu planul bazei unghiul α (fig. 22). Să se determine suprafaţa secţiunii duse prin latura bazei şi mijlocul muchiei laterale.

Drepte paralele şi planuri.

14. Capetele unui segment $AB = a = 13\,cm$ se află la distanţele $m = 5\,cm$ şi $n = 8\,cm$ de planul dat. Să se determine unghiul dintre segment şi plan (2 cazuri).

15. Din două puncte ale unui plan s'a dus două oblici paralele: AM şi BN, care formează unghiul α cu planul (fig. 23); dreapta MN, care le întretae perpendicular, formează cu planul unghiul β. Să se determine unghiul φ dintre dreapta AB şi dreapta AM.

16. Din două puncte ale unui plan, care se găsesc la o distanţă a unul de altul, s'a dus două oblici paralele, formînd unghiul φ cu planul. Să se determine distanţa dintre ele, dacă distanţa dintre proecţiile lor pe plan este egală cu b.

17. Un segment AB este paralel cu un plan. Din capetele lui s'a dus pe plan două oblici: $AC = c$ şi $BD = d$. Oblica AC formează cu planul unghiul α. Să se determine unghiul inclinării oblicii BD pe acest plan ($c = \sqrt{6}$; $d = 3$; $\alpha = 60°$).

18. Din capetele unui segment paralel cu un plan s'a ridicat pe el perpendiculare, care formează cu planul unghiu-

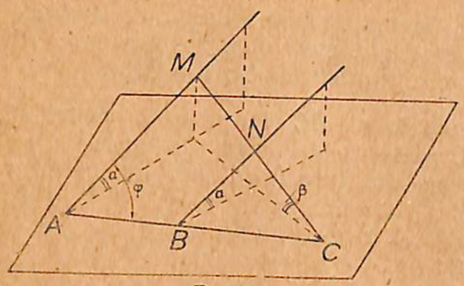


Fig. 23.

rile α şi β ($\alpha > \beta$). Lungimea segmentului este egală cu a, distanţa dintre punctele de întretăere ale planului cu perpendicularele ridicate este egală cu b. Să se determine distanţa dela plan pînă la segment (două cazuri).

19. Raportul dintre două segmente de drepte cuprinse între două planuri paralele este 2 : 3, iar raportul dintre unghiurile formate de ele cu planul este 2 : 1. Să se determine aceste unghiuri.

§ 17. Unghiuri diedre şi poliedre.

1. Se dă un unghi diedru α. Dintr'un punct situat pe o faţă a acestui unghi la distanţa a de muchie, s'a ridicat o perpendiculară pînă la întretăere cu cealaltă faţă. Să se determine lungimea acestei perpendiculare ($a = 6{,}06$; $\alpha = 41°55'$).

2. 1) Un triunghi dreptunghi ABC e aşezat astfel, încît ipotenuza lui AB se găseşte în planul P, iar catetele formează cu planul P unghiurile α şi β (fig. 24). Să se determine unghiul φ dintre planul triunghiului şi planul P.

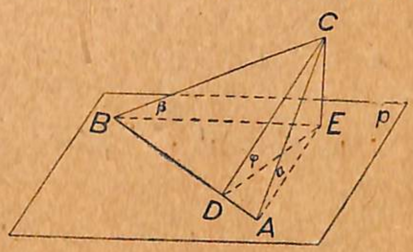


Fig. 24.

2) O latură (AB) a triunghiului ABC se găseşte în planul P. Celelalte două laturi (CA şi CB) formează cu planul P unghiurile α şi β, ale căror tangente sînt respectiv $\frac{1}{3}$ şi $\frac{1}{4}$, iar proecţiile acestor laturi pe acelaş plan sînt perpendiculare una pe alta. Să se determine inclinarea triunghiului ABC pe planul P.

3. Pe un acoperiş cu povîrnişul de 20° s'a dus o dreaptă MN (fig. 25), care formează un unghi de 25° cu linia povîrnişului cel mai mare MK (linia povîrnişului cel mai mare este perpendiculara pe linia orizontală dusă pe plan). Să se afle unghiul x dintre MN şi orizont.

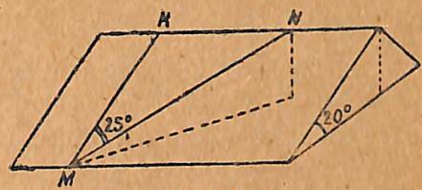


Fig. 25.

4. Pe coasta unui munte cu un povîrniş de 32° trece un drum care formează un unghi de 45° cu linia povîrnişului cel mai mare (vezi problema 3). Să se afle povîrnişul drumului.

5. Din punctul A al planului M s'a dus oblică AD, care formează unghiul α cu planul (fig. 26); prin AD s'a dus un plan P inclinat pe planul M sub unghiul $DBC = \beta$. Să se determine unghiul dintre AD şi linia întretăerii planurilor M şi P.

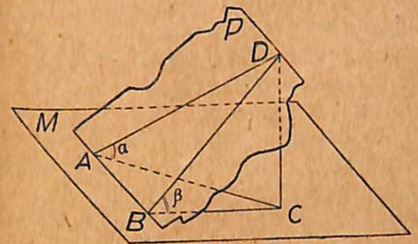


Fig. 26.

6. Intr'o piramidă, care are ca bază un poligon de n laturi, înălţimea e mai mică de două ori decît latura bazei. Să se determine unghiul diedru φ la bază.

7. In figura 27 se dă schema macaralei plutitoare de pe un ponton (pontonul este o barcă de fier) proectată în planurile vertical şi orizontal. Dimensiunile se dau în metri. Să se afle:

a) lungimea braţelor a şi lungimea suporturilor b;

b) unghiurile inclinării braţelor şi suporturilor pe suprafaţa plană a vasului;

c) unghiul dintre braţe şi unghiul dintre suporturi;

d) unghiul dintre planul braţelor şi pla-

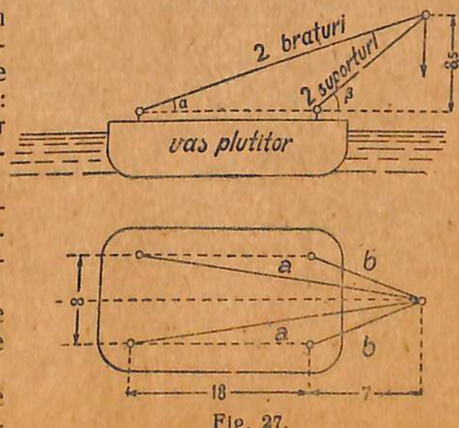


Fig. 27.

nul vasului; unghiul dintre planul suporturilor şi planul vasului.

8. In figura 28 se dă planul acoperişului unei clădiri de formă pătrată; dimensiunile sînt date în metri. Baza de sus a acoperişului se află la o înălţime egală cu $\frac{1}{3}$ din lăţimea clădirii (socotind dela baza de jos a acoperişului). Toate cele patru povîrnişuri sînt inclinate sub unul şi acelaş unghi pe planul orizontal. Care este mărimea unghiului inclinării acoperişului?

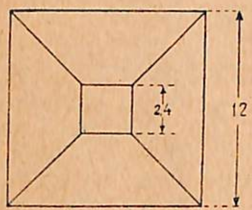


Fig. 28.

9. Intr'un triunghi dreptunghi se dă ipotenuza a şi un unghi ascuţit α. Să se determine distanţa dela vîrful unghiului drept pînă la planul care trece prin ipotenuză şi formează unghiul φ cu planul triunghiului.

10. O piramidă are ca bază un triunghi regulat; una din cele trei feţe e perpendiculară pe bază, iar celelalte două sînt inclinate pe bază sub unghiul α. Care sînt unghiurile inclinării pe planul bazei ale muchiilor laterale?

11. Dreapta AB e paralelă cu planul P. Dreapta CD intretae AB, formînd cu ea unghiul α şi cu planul P unghiul φ. Să se determine unghiul planului P cu planul dreptelor AB şi CD.

12. Intr'un paralelipiped dreptunghiular s'a unit prin drepte capetele muchiilor care pleacă din unul şi acelaş vîrf. Suprafeţele triunghiurilor care s'au format pe feţele paralelipipedului sînt de $4\,dm^2$; $6\,dm^2$; $12\,dm^2$. Să se afle unghiul dintre secţiunea paralelipipedului cu planul, care trece prin dreptele arătate, şi planul mai mic.

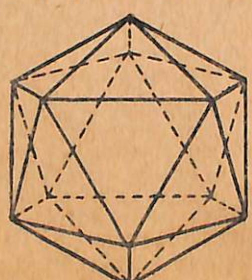


Fig. 29.

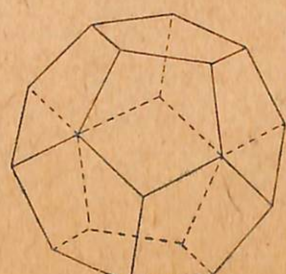


Fig. 30.

13. Intr'o piramidă patruunghiulară regulată, raportul dintre latura bazei şi muchia laterală este $\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Prin diagonala bazei s'a dus un plan paralel cu muchia laterală. Să se determine inclinarea acestui plan pe bază.

14. Un paralelogram şi un plan P sînt situate astfel, încît una din laturile mai mici ale paralelogramului se găseşte în planul P, iar latura opusă ei e depărtată de planul P cu o distanţă egală cu distanţa dintre laturile mai mari ale paralelogramului. Să se determine unghiul dintre planul P şi planul paralelogramului, dacă raportul dintre laturile paralelogramului este $3:5$.

15. Să se calculeze unghiul dintre două feţe adiacente:

1) ale unui tetraedru regulat;
2) „ „ octaedru „
3) „ „ icosaedru „ (fig. 29);
4) „ „ dodecaedru „ (fig. 30).

§ 18. Suprafaţa proecţiei unei figuri pe plan.

1. Suprafaţa unui paralelogram $Q = 50\,cm^2$. Planul lui formează cu planul proecţiei P un unghi de $30°$. O latură a paralelogramului se găseşte în planul P. Să se afle suprafaţa proecţiei paralelogramului.

2. Intr'o prizmă triunghiulară dreaptă, prin una din laturile bazei, s'a dus un plan care întretae muchia laterală opusă şi se abate de planul bazei cu $45°$. Să se determine suprafaţa secţiunii, dacă suprafaţa bazei este egală cu Q.

3. Intr'o prizmă triunghiulară regulată, printr'o latură a bazei s'a dus un plan de secţiune sub unghiul α pe planul bazei. Latura bazei este egală cu a. Să se afle suprafaţa secţiunii.

4. Suprafaţa unei deschizături în acoperiş, prin care trece un hogeac (coş), este de $2100\,cm^2$. Unghiul inclinării acoperişului e de $32°$. Hogeacul e de forma unei prizme pătrate. Să se afle latura bazei prizmei.

5. Dimensiunile unui hogeac sînt de $40\,cm \times 40\,cm$. Unghiul inclinării acoperişului e de $35°$. Să se afle suprafaţa deschizăturii în acoperiş.

6. Un acoperiş cu patru povîrnişuri acoperă o suprafaţă de

28 m^2. Toate povîrnișurile acoperișului sînt inclinate pe plafon sub un unghi de 32°53′. Să se afle suprafața acoperișului.

7. Un povîrniș lateral din cele patru povîrnișuri ale unui acoperiș este un trapez isoscel cu laturile paralele de 10 m și 6 m; înălțimea trapezului e de 5 m. Suprafața proecției povîrnișului pe planul plafonului e de 32 m^2. Să se afle unghiul inclinării povîrnișului și înălțimea coamei casei asupra plafonului.

8. In figura 31 se dă planurile unor acoperișuri cu un singur povîrniș și cu patru povîrnișuri sub formă de dreptunghiuri cu laturile a și b; povîrnișurile ambelor acoperișuri sînt inclinate față de orizont sub unghiul α. Pentru văpsirea cărui acoperiș e nevoe de mai mult material?

9. Intensitatea luminării depinde de unghiul format de razele de lumină cu suprafața luminată. Să zicem că suprafața luminată e egală cu Q și unghiul razelor de lumină cu suprafața luminată α. Care-i suprafața pe care ar cădea aceleași raze de lumină, dacă suprafața luminată ar fi perpendiculară pe razele de lumină? Va fi mai mare sau mai mică această suprafață? Se va mări sau se va micșora intensitatea luminării?

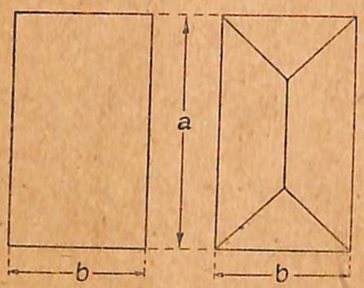


Fig. 31.

10. Ce suprafață orizontală se poate înveli cu un acoperiș inclinat de 27°30′ și cu o suprafață de 120 m^2?

§ 19. Paralelipipedele, prizmele, piramidele și suprafața lor.

Paralelipipede și prizme.

1. Unghiurile formate de diagonala unui paralelipiped dreptunghiular cu muchiile lui sînt egale cu α, β și γ.

1) Să se demonstreze că $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. 2) Să se calculeze γ, cînd $\alpha = 31°10'24''$ și $\beta = 69°9'36''$.

2. Dacă tăem o prizmă patruunghiulară regulată astfel ca să obținem în secțiune un romb cu unghiul ascuțit α, planul secant va fi paralel diagonalei bazei și va forma cu planul

bazei un unghi φ, astfel că $\cos\varphi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Să se demonstreze aceasta.

3. Intr'o prizmă patruunghiulară regulată (fig. 32), prin mijlocurile a două laturi succesive ale bazei, s'a dus un plan care întretae trei muchii laterale și este inclinat pe planul bazei sub unghiul α. Latura bazei este egală cu a. Să se determine suprafața secțiunii obținute.

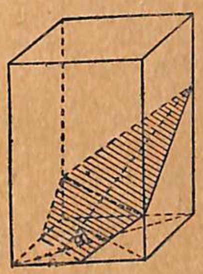


Fig. 32.

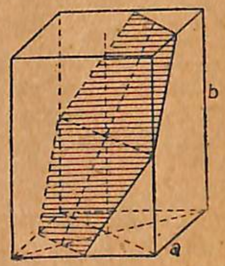


Fig. 33.

4. Intr'o prizmă patruunghiulară regulată (fig. 33) s'a dus un plan prin mijlocul axei și mijlocurile a două laturi succesive ale bazei. Știind că latura bazei este egală cu a și muchia laterală cu b, să se determine: 1) suprafața secțiunii obținute și 2) unghiul dintre planul dus și planul bazei.

5. O prizmă patruunghiulară dreaptă are la bază un romb cu unghiul ascuțit α. Cum trebue tăiată această prizmă pentru ca să obținem în secțiune un pătrat cu vîrfurile pe muchiile laterale?

6. Intr'un paralelipiped dreptunghiular, diagonala d formează cu baza un unghi β. Unghiul dintre diagonala bazei și latura ei este α. Să se determine suprafața laterală a paralelipipedului ($\alpha = 21°35'$; $\beta = 54°24'$; $d = 17{,}89$ m).

7. Un paralelipiped drept are ca bază un romb; diagonala mai mică a rombului este egală cu d, iar unghiul ascuțit este α. Inălțimea paralelipipedului este egală cu $\frac{d}{2}$. Să se afle suprafața lui totală ($d = 25{,}87$; $\alpha = 75°20'$).

8. Latura bazei unei prizme pentagonale regulate este egală cu a, înălțimea prizmei este egală cu $\frac{1}{4}d$, unde d este diagonala bazei. Să se calculeze suprafața totală a prizmei ($a = 23{,}79$ m).

9. O prizmă dreaptă are ca bază un triunghi isoscel, în care unghiul dintre laturile egale a este α. Din vîrful bazei de sus s'a dus două diagonale ale fețelor laterale egale; unghiul

dintre ele este egal cu β. Să se afle suprafața laterală a prizmei ($a = 97{,}84\,cm$; $\alpha = 63°28'$ și $\beta = 39°36'$).

10. Intr'o prizmă triunghiulară, fiecare latură a bazei este egală cu a. Unul din vîrfurile bazei are ca proecție a sa centrul celeilalte baze. Muchiile laterale sînt inclinate pe planul bazei sub unghiul α. Să se determine suprafața laterală a prizmei.

Piramida.

11. Intr'o piramidă, a cărei bază este un triunghi regulat, o față laterală este perpendiculară pe bază, iar celelalte două fețe formează cu baza un unghi φ. Să se determine unghiurile formate de muchiile laterale cu planul bazei ($\varphi = 30°$).

12. Intr'o piramidă regulată de n laturi, unghiul plan dela vîrf este α. Să se determine unghiurile ei diedre la bază ($n = 4$; $\alpha = 60°$).

13. Intr'o piramidă patrulateră regulată, latura bazei este egală cu a, iar muchia laterală formează cu planul bazei unghiul α. In această piramidă este înscris un cub, astfel că patru din vîrfurile lui sînt situate pe apotemele piramidei. Să se determine muchia cubului.

14. Intr'o piramidă triunghiulară regulată, latura bazei este egală cu a și formează cu muchia laterală un unghi α. Să se determine suprafața secțiunii, duse prin muchia laterală, și înălțimea piramidei.

15. Intr'o piramidă patruunghiulară regulată se dă apotema c și suprafața secțiunii diagonale P. Să se determine în această piramidă unghiul dintre fața laterală și bază și latura bazei ($c = 5$; $P = 15$).

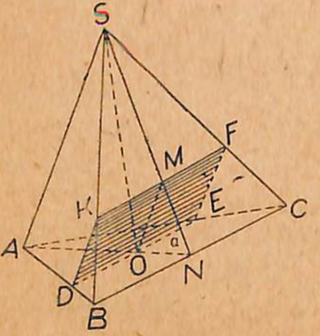


Fig. 34.

16. Intr'o piramidă patruunghiulară regulată raportul înălțimii față de latura bazei este egal cu $m:n$. Prin diagonala bazei s'a dus un plan inclinat astfel încît secțiunea obținută este egală cu secțiunea diagonală. Să se afle unghiul dintre planul dus și baza piramidei ($m:n = 1:\sqrt{6}$).

17. Intr'o piramidă triunghiulară regulată (fig. 34) se dă latura a și unghiul diedru α la bază. Să se determine suprafața secțiunii $DEFK$, duse prin centrul bazei paralel cu muchiile SA și BC, care nu se întretae, ale piramidei ($a = 3$; $\alpha = 70°$).

18. Intr'o piramidă patruunghiulară regulată unghiul diedru la bază este egal cu α. Prin muchia acestui unghi diedru s'a dus în interiorul piramidei un plan, care formează cu baza un unghi β. Latura bazei este egală cu a. Să se determine suprafața secțiunii.

Aplicarea teoremei despre suprafața proecției pentru aflarea suprafeței unei piramide.

19. Dacă toate fețele laterale ale unei piramide oarecare sînt inclinate pe planul bazei sub acelaş unghi α, atunci:

$$S_{lat} = \frac{Q}{\cos\alpha} \text{ și } S_{tot} = \frac{2Q\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},$$

unde S este suprafața, Q este suprafața bazei. Să se demonstreze aceasta.

20. (Oral.) O piramidă are ca bază un triunghi dreptunghi cu catetele de $6\,cm$ și $8\,cm$. Toate fețele piramidei sînt inclinate pe bază sub unghiul de 60°. Să se afle S_{lat}.

21. 1) (Oral.) Latura bazei unei piramide patruunghiulare regulate este egală cu a, iar unghiul diedru la bază e de 60°. Să se determine suprafața laterală.

2) Sînt date două piramide regulate, una triunghiulară și altă exagonală. In fiecare piramidă latura bazei este egală cu a, iar unghiul diedru la bază este de 30°. Să se determine suprafața laterală a fiecărei piramide.

22. Intr'o piramidă triunghiulară laturile bazei sînt de $13\,cm$, $14\,cm$, $15\,cm$, iar unghiurile diedre la bază sînt de cîte 60° fiecare. Să se determine suprafața laterală a piramidei.

23. Un turn se termină cu un acoperiş de forma unei piramide octogonale. Fețele laterale ale lui sînt inclinate pe bază sub un unghi de 60°. Latura bazei piramidei este de $1{,}23\,m$. De cîți metri pătrați de foi de aramă (cupru) e nevoe pentru acest acoperiş?

24. Suprafața bazei unei piramide regulate este $168\,cm^2$. Suprafața laterală a ei este de $200\,cm^2$. Să se afle unghiul inclinării fețelor laterale pe bază.

25. (Oral.) Intr'o piramidă triunghiulară regulată, o față laterală e inclinată pe bază sub unghiul α. Latura bazei este a. Să se calculeze S_{lat}.

26. Inălțimea unei piramide patrulaterale regulate este h. Unghiul diedru la bază este α. Să se determine suprafața totală a piramidei.

27. O piramidă are ca bază un romb cu latura a și un-

ghiul ascuţit α; unghiurile diedre la bază sînt egale cu φ. Să se afle S_{tot}.

28. Apotema unei piramide regulate de n laturi este egală cu k şi formează cu planul bazei un unghi α. Să se afle S_{tot} ($n = 12$; $k = 36{,}3$; $\alpha = 35°40'$).

29. O piramidă are ca bază un trapez isoscel cu laturile paralele egale cu a şi b ($b > a$). Toate feţele laterale ale piramidei sînt inclinate pe planul bazei sub unghiul α. Să se afle S_{tot}.

30. O piramidă are ca bază un trapez isoscel cu diagonala l, care formează un unghi α cu baza mai mare. Toate feţele laterale ale piramidei sînt inclinate pe planul bazei sub unghiul φ. Să se determine S_{tot}.

Suprafaţa unei piramide.

31. Intr'o piramidă patrulaterală regulată se dă: latura bazei a şi unghiul plan α dela vîrf. Să se determine suprafaţa ei totală.

32. Intr'o piramidă regulată de n laturi, latura bazei este a; muchia laterală formează cu planul bazei un unghi α. Să se determine suprafaţa laterală a piramidei.

33. Intr'o piramidă triunghiulară, unghiurile dela vîrf sînt α, α şi β. Muchia laterală, care serveşte de latură comună unghiurilor egale, este perpendiculară pe planul bazei şi este egală cu a. Să se determine suprafaţa laterală a acestei piramide.

34. O piramidă are la bază un pătrat cu latura a. Două feţe laterale sînt perpendiculare pe bază, iar celelalte două formează cu ea un unghi α. Să se determine S_{lat} şi S_{tot} ale acestei piramide.

35. O piramidă are ca bază un dreptunghi. Două feţe laterale sînt perpendiculare pe bază, iar celelalte două formează cu ea unghiurile α şi β. Inălţimea piramidei este h. Să se determine suprafaţa ei laterală.

36. O piramidă are ca bază un romb cu latura a şi cu unghiul ascuţit α. Două feţe laterale (de ex., cele care cuprind unghiul α) sînt perpendiculare pe bază, iar celelalte două sînt inclinate pe ea sub un unghi φ. Să se determine suprafaţa laterală a acestei piramide.

Trunchiuri de piramidă.

37. Intr'un trunchi de piramidă regulată de n laturi se dă: muchia laterală c şi laturile bazei a şi b ($a > b$). Să se determine înălţimea trunchiului de piramidă.

38. Intr'un trunchi de piramidă regulată patruunghiulară raportul laturilor bazei mai mari faţă de laturile bazei mai

mici este $m : n$, muchiile laterale sînt inclinate pe planul bazei mai mari sub unghiul α. In acest trunchi s'a dus un plan prin latura bazei mai mari şi latura opusă ei a bazei mai mici. Ce unghi formează acest plan cu baza mai mare a trunchiului?

39. Intr'un trunchi de piramidă regulată de n laturi se dă înălţimea h şi laturile bazei a şi b ($a > b$). Să se determine suprafaţa totală a trunchiului.

40. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă regulată de n laturi sînt egale cu a şi b ($a > b$), muchia laterală formează cu baza un unghi α. Să se determine suprafaţa totală a trunchiului.

41. Intr'un trunchi de piramidă regulată de n laturi raportul dintre suprafeţele bazelor este m^2, apotema este k, unghiul dintre apotemă şi înălţime este α. Să se determine suprafaţa laterală a trunchiului.

42. Intr'un trunchi de piramidă patruunghiulară regulată se dă: înălţimea lui h şi unghiurile α şi β, formate de baza mai mare cu muchia laterală şi diagonala trunchiului de piramidă. Să se determine suprafaţa lui laterală ($h = 25$; $\alpha = 50°15'$; $\beta = 35°40''$).

§ 20. Cilindrul, conul, trunchiul de con şi suprafaţa lor.

Cilindrul.

1. Intr'un cilindru cu secţiunea axială un pătrat, un punct al circonferinţei bazei de sus e unit cu un punct al circonferinţei bazei de jos. Unghiul dintre razele duse în aceste puncte (se are în vedere unghiul dintre drepte secante) este de 30°. Să se determine unghiul dintre dreapta reunitoare şi axa cilindrului.

2. Intr'un cilindru cu secţiunea axială un pătrat cu raza bazei egală cu R, un punct al circonferinţei bazei de sus e unit cu un punct al circonferinţei bazei de jos. Dreapta reunitoare formează cu planul bazei un unghi α. Să se determine distanţa cea mai scurtă dintre această dreaptă şi axa cilindrului.

3. La un cilindru s'a dus o dreaptă tangentă sub un unghi α pe planul bazei. Să se determine distanţa centrului bazei de jos de această dreaptă, dacă distanţa lui de punctul de tangenţă este d şi raza bazei este R.

4. Muchia laterală a unei piramide triunghiulare regulate este egală cu b şi formează cu planul bazei un unghi α. In

această piramidă e înscris un cilindru cu secţiunea axială un pătrat, astfel încît baza lui e situată în planul bazei piramidei. Să se determine înălţimea cilindrului (fig. 35).

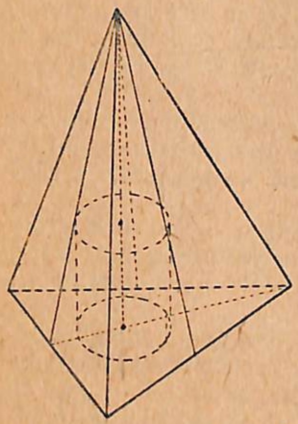


Fig. 35

Conul.

5. Raza bazei unui con este R, iar generatoarea este înclinată pe planul bazei sub un unghi α. In acest con s'a dus un plan prin vîrful lui sub un unghi φ cu înălţimea. Să se determine suprafaţa secţiunii obţinute.

6. Un con e cuprins între două planuri paralele, astfel încît baza lui se află în unul din planurile date, iar vîrful în altul. Unghiul dintre axa conului şi generatoarea este α. Prin mijlocul axei s'a dus o dreaptă care formează cu ea un unghi β şi intretae suprafaţa laterală a conului în două puncte. Segmentul acestei drepte, cuprins între planurile paralele, este egal cu a. Să se determine segmentul cuprins în interiorul conului.

7. Să se determine muchia cubului înscris într'un con, a cărui generatoarea l este inclinată pe planul bazei sub un unghi α.

8. Intr'un con se dă raza bazei R şi unghiul α dintre generatoare şi planul bazei. In acest con e înscrisă o prizmă triunghiulară dreaptă cu muchii egale, astfel încît baza ei e situată în planul bazei conului. Să se determine lungimea muchiilor ei.

Suprafaţa unui con.

9. Generatoarea a a unui con e inclinată pe planul bazei lui sub un unghi α. Să se determine suprafaţa totală a conului.

10. Suprafaţa laterală a unui con e de trei ori mai mare decît suprafaţa bazei. Să se afle unghiul dintre generatoare şi bază.

11. Să se determine unghiul dintre generatoare şi planul bazei conului, în care suprafaţa secţiunii axiale e de 4 ori mai mică decît suprafaţa totală.

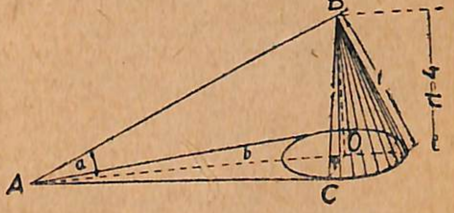
12. Să se determine suprafaţa totală a unui con, dacă unghiul dintre generatoare şi planul bazei este α, iar suprafaţa secţiunii axiale este Q.

13. Prin două generatoare ale unui con, care formează în-

tre ele un unghi φ, s'a dus un plan inclinat pe planul bazei conului sub un unghi α. Suprafaţa secţiunii este egală cu S. Să se determine înălţimea conului ($\varphi = 52°16'$; $\alpha = 33°10'13''$; $S = 617{,}5\ cm^2$).

14. Raza bazei unui con este r; generatoarea este inclinată pe planul bazei sub un unghi α. Să se determine suprafaţa laterală a conului şi suprafaţa secţiunii, care trece prin vîrful conului sub un unghi δ la înălţimea lui ($r = 2{,}3\ m$; $\alpha = 42°27'$; $\delta = 36°21'18''$).

15. In figura 36 se arată forma unui terasament. Se dă: $\frac{h}{b} = \frac{1}{n} = 0{,}05$; $\frac{h}{r} = \frac{1}{m} = \frac{2}{3}$; $h = 4\ m$. Să se calculeze: 1) b; 2) r; 3) $\alpha = \angle BAO$; 4) $\varphi = \angle BCO$; 5) γ; 6) suprafaţa planului; 7) suprafaţa terasamentului.



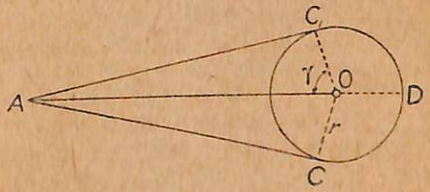


Fig. 36.

16. Suprafaţa laterală a unui con este egală cu S; generatoarea $= a$. Să se afle unghiul dela vîrful secţiunii axiale ($S = 81{,}312\ m^2$; $a = 10\ m$).

17. Inălţimea unui con este H, iar generatoarea este inclinată pe planul bazei sub un unghi α. Suprafaţa totală a acestui con este împărţită în două jumătăţi de un plan dus perpendicular pe înălţime. Să se determine: 1) distanţa planului secant dela vîrful conului; 2) raportul dintre părţile suprafeţei laterale ($\alpha = 60°$).

18. Unghiul dela vîrful secţiunii axiale a unui con este egal cu α; să se determine unghiul la centru în suprafaţa laterală a conului desfăşurat. (Exemple: 1) un con cu secţiunea axială un triunghi echilateral; 2) $\alpha = 70°24'$).

Trunchiul de con.

19. Generatoarea unui trunchi de con e inclinată pe baza lui de raza R sub un unghi α; raza celeilalte baze este r. Să se determine suprafaţa laterală a trunchiului.

20. Inălţimea unui trunchi de con este media proporţională

dintre razele bazelor, iar suma acestor raze este m. Unghiul format de generatoarea trunchiului de con cu planul bazei lui este α. Să se determine suprafața laterală a acestui trunchi.

21. Prin două generatoare ale unui trunchi de con, care formează între ele un unghi β, s'a dus un plan care întretae bazele trunchiului pe coarde respectiv egale cu m și n $(m > n)$. Fiecare coardă subîntinde arcul α. Să se afle suprafața laterală a trunchiului de con.

22. Intr'un trunchi de con, ale cărui baze au razele de R și r, s'a dus un plan sub unghiul β la bază. Acest plan tae din circonferința fiecărei baze un arc δ. Să se determine suprafața secțiunii.

23. Inălțimea unui trunchi de con este h; generatoarea lui formează cu planul bazei de jos un unghi α și este perpendiculară pe linia care unește capătul ei de sus cu capătul de jos al generatorii opuse. Să se determine suprafața laterală a trunchiului.

24. Suprafața bazei de jos a unui trunchi de con este în raportul de $m:n:p$ cu suprafața bazei lui de sus și cu suprafața laterală. Să se determine unghiul dintre generatoare și planul bazei de jos.

25. Intr'un trunchi de con, diagonalele secțiunii axiale sînt perpendiculare una pe alta, iar generatoarea este egală cu l și formează cu planul bazei de jos un unghi α. Să se determine suprafața laterală și suprafața totală a acestui trunchi $(l = 12;\ \alpha = 70°20')$.

26. Generatoarea unui trunchi de con formează cu planul bazei lui un unghi α; suprafețele bazelor sînt Q și q. Să se determine S_{lat}.

§ 21. Calcularea volumurilor.

Paralelipipedul.

1. Diagonala l a unui paralelipiped dreptunghi este inclinată pe planul bazei sub unghiul φ; unghiul ascuțit dintre diagonalele bazei este β. Să se determine volumul paralelipipedului.

2. Intr'un paralelipiped dreptunghi, diagonala bazei $d = 7{,}5\,dm$, unghiul dintre diagonalele bazei $\alpha = 35°27'18''$, iar unghiul format de planul diagonal, dus prin latura mai mare a bazei, cu planul bazei $\beta = 57°33'17''$. Să se determine volumul paralelipipedului.

3. Unghiul ascuțit la baza unui paralelipiped drept este egal cu α, iar laturile sînt a și b; diagonala mai mică a paralelipipedului este egală cu diagonala mai mare a bazei. Să se determine volumul paralelipipedului.

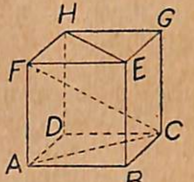


Fig. 37.

4. Un paralelipiped drept (fig. 37) are ca bază un paralelogram, în care diagonala $AC = d$, latura $CB = \frac{1}{4}AC$ și $\angle ABC = \alpha$. Diagonala FC a paralelipipedului formează cu planul bazei un unghi φ. Să se afle volumul paralelipipedului și unghiul dintre diagonalele AC și EH ale bazelor $(d = 14{,}278\,dm;\ \alpha = 106°6'7'';\ \varphi = 57°46'51'')$.

5. Intr'un paralelipiped, lungimile a trei muchii care pleacă dintr'un singur vîrf sînt a, b și c; muchiile a și b sînt perpendiculare una pe alta, iar muchia c formează cu fiecare din ele un unghi α. Să se determine volumul paralelipipedului și unghiul dintre muchia c și planul dreptunghiului $(\alpha = 120°)$.

Prizma.

6. Diagonala unei prizme patruunghiulare regulate formează cu muchia laterală un unghi α; latura bazei este a. Să se determine volumul prizmei.

7. Prin diagonala bazei de jos și un vîrf al bazei de sus ale unei prizme patruunghiulare regulate s'a dus un plan, care întretae două muchii laterale adiacente pe două drepte care formează un unghi $\alpha = 58°48'36''$. Latura bazei prizmei $a = 6{,}4\,cm$. Să se determine volumul prizmei.

8. Intr'o prizmă triunghiulară regulată, două vîrfuri ale bazei de sus sînt unite cu mijlocurile laturilor opuse lor ale bazei de jos. Unghiul dintre dreptele obținute, îndreptat cu deschizătura spre planul bazei, este egal cu α; latura bazei este egală cu a. Să se determine volumul prizmei.

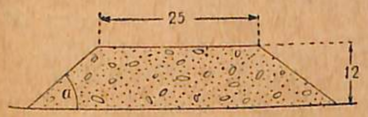


Fig. 38.

9. In figura 38 se dă secțiunea terasamentului unei căi ferate. Unghiul α se determină de egalitatea $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$. Cîți metri cubi de pămînt trebue pentru 1 metru de lungime de terasament? In figură, dimensiunile se dau în metri.

10. O prizmă dreaptă are ca bază un triunghi ABC cu latura $AC = b = 38{,}03\,dm$, latura $BC = a = 34{,}84\,dm$ şi unghiul $ACB = \gamma = 58°22'$. Muchia laterală a prizmei este egală cu înălţimea h_c a triunghiului ABC. Să se determine volumul prizmei.

11. Inălţimea h a unei prizme drepte este de $20\,dm$; prizma are ca bază un trapez dreptunghi cu unghiul ascuţit $\alpha = 45°42'16''$, care (trapez) este circumscris unui cerc de raza $r = 6{,}15\,dm$. Să se determine volumul prizmei.

12. E nevoe de a săpa un canal pe un lot de pămînt care se urcă, formînd un unghi $\varphi = 18°30',5$ cu orizontul (fig. 39). Pereţii canalului au un povîrniş de unghiul $\alpha = 68°10'$, lăţimea canalului jos e $b = 14{,}2\,m$, adîncimea la mijloc e $h = 9{,}2\,m$. Cîţi metri cubi de pămînt trebue săpat din 1 metru de lungime de canal?

13. O prizmă are la bază $\triangle ABC$, în care $BC = a$ şi $AB = AC$. Muchia AA_1 este egală cu b şi perpendiculară pe BC; unghiul diedru la muchia AA_1 este egal cu α. Să se determine volumul prizmei.

Piramida.

14. Să se determine volumul unei piramide regulate de n laturi, a cărei muchie b e inclinată pe planul bazei ei sub un unghi β ($n = 8$; $b = 3{,}5\,m$; $\beta = 78°39'$).

15. Să se determine volumul unei piramide patruunghiulare regulate, în care muchia laterală este egală cu b, iar unghiul plan dela vîrful ei este egal cu α.

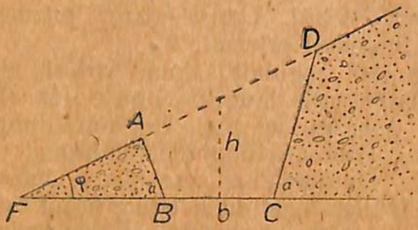


Fig. 39.

16. Să se determine volumul unei piramide, dacă înălţimea ei este h, muchiile laterale sînt inclinate pe planul bazei sub un unghi φ şi are ca bază un triunghi cu unghiurile α şi β.

17. Intr'o piramidă triunghiulară, două feţe laterale sînt triunghiuri isoscele dreptunghe, ale căror ipotenuze sînt egale cu b şi formează între ele un unghi α. Să se determine volumul acestei piramide.

18. O piramidă are ca bază un trapez, în care fiecare din laturile laterale şi latura mai mică din cele paralele are lungimea a, iar unghiurile ascuţite sînt egale cu α; muchiile laterale ale piramidei formează cu planul bazei un unghi φ. Să se determine volumul acestei piramide.

19. O piramidă are ca bază un trapez isoscel, în care laturile paralele sînt a şi b $(a > b)$, iar segmentele inegale ale diagonalelor formează un unghi α; înălţimea piramidei trece prin punctul de întretăere a diagonalelor bazei; unghiurile diedre, alăturate la laturile paralele ale bazei, se rapoartă ca $1:2$. Să se determine volumul piramidei.

20. Piramida $SABCD$ are ca bază un paralelogram $ABCD$. Muchiile SB şi SD sînt perpendiculare pe laturile bazei BC şi AD şi formează cu planul bazei un unghi φ. Să se determine volumul piramidei, dacă unghiul ascuţit al paralelogramului este egal cu α, iar suprafaţa cu P.

21. In faţa ABC a piramidei $SABC$, unghiul A este egal cu $\alpha = 72°36'45''$ şi unghiul B este egal cu $\beta = 47°23'15''$. Volumul piramidei este $V = 317{,}058\,cm^3$. Prin muchia SC şi bisectriţa unghiului C în triunghiul ABC s'a dus un plan. In ce părţi se va împărţi volumul piramidei de acest plan?

22. Prin muchia unui tetraedru regulat s'a dus un plan, care împarte volumul lui în raportul $3:5$. In ce părţi împarte el unghiul diedru?

Trunchiul de piramidă.

23. O groapă pentru iaz are forma unui trunchi de piramidă patruunghiulară regulată. Laturile bazelor sînt $a = 14\,m$ şi $b = 10\,m$. Feţele laterale sînt inclinate pe planul bazei sub un unghi $\alpha = 38°$. Cîtă apă poate încăpea în această groapă?

24. Intr'un trunchi de piramidă patruunghiulară regulată se dau laturile a şi b ale ambelor baze şi unghiul ascuţit α al unei feţe laterale. Să se determine volumul ($a = 25{,}704$; $b = 15{,}23$; $\alpha = 65°12'$).

25. Intr'un trunchi de piramidă regulată de n laturi, laturile bazelor sînt a şi b. Muchia laterală formează cu planul bazelor un unghi α. Găsiţi volumul.

Cilindrul.

26. Suprafaţa laterală a unui cilindru desfăşurat este un dreptunghi, în care diagonala este egală cu d şi formează un unghi α cu baza. Să se determine volumul cilindrului.

27. Intr'un cerc, care serveşte de bază unui cilindru, s'a dus o coardă lungă de a. Unghiul la centru corespunzător ei

este egal cu α. Inălţimea cilindrului este h. Să se afle volumul lui ($a = 4{,}8\ dm$; $\alpha = 26°32'46''$; $h = 23\ dm$).

28. In baza unui cilindru cu secţiunea axială un pătrat s'a înscris un poligon regulat de n laturi, a cărui latură este a. Să se determine volumul acestui cilindru.

29. Un vas de forma cilindrică aşezat orizontal este umplut cu un lichid (fig. 40). Arcul AB conţine unghiul $\alpha = 135°$. Diametrul (interior) al vasului e egal cu $D = 1{,}7\ m$. Lungimea (interioară) a vasului este $l = 3{,}5\ m$. Să se determine cantitatea lichidului.

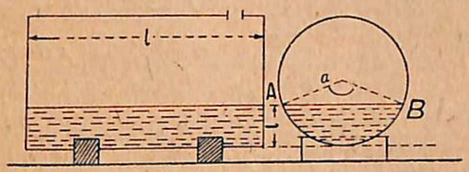


Fig. 40.

30. Să se afle volumul unui tub de formă cilindrică şi cu înălţimea H, cînd ştim că dacă ducem prin generatoarea suprafeţei lui exterioare două planuri tangente la suprafaţa interioară, unghiul dintre ele va fi α, iar coarda care uneşte punctele de tangenţă ale acestor planuri cu circonferinţa interioară a bazei tubului este egală cu b.

31. In baza unui cilindru s'a dus o coardă egală cu latura poligonului regulat de n laturi, înscris în această bază. Dacă unim capetele acestei coarde cu centrul celeilalte baze, se obţine un triunghi, a cărui suprafaţă este Q, iar unghiul dela vîrf este α. Să se calculeze volumul V al acestui cilindru.

Conul.

32. Unghiul povîrnişului pentru nisipul mărunt e $\varphi = 31°$. O movilă de nisip are forma unui con, a cărui bază e o circonferinţă lungă de $c = 11\ m$. Greutatea specifică a nisipului este $d = 1{,}6$. Să se afle greutatea acestei movili.

33. Unghiul format de generatoarea şi axa unui con este $\alpha = 18°45'50''$; lungimea generatoarei este $l = 36{,}17\ dm$. Să se determine volumul conului.

34. Generatoarea unui con e inclinată pe planul bazei sub un unghi α, înălţimea este h. Să se determine volumul conului.

35. Generatoarea unui con e inclinată pe planul bazei lui sub un unghi α; raza bazei este R. Să se determine suprafaţa totală S şi volumul V al conului.

36. Secţiunea axială a unui con este un triunghi, care are

la vîrf unghiul α. Raza cercului circumscris acestui triunghi este R. Să se determine volumul conului.

37. Coarda a din baza unui con e subîntinsă de arcul α; unghiul dintre înălţimea şi generatoarea conului este β. Să se determine volumul acestui con.

38. Diferenţa dintre generatoarea şi înălţimea conului $d = 2{,}5\ m$, iar unghiul dintre ele $\alpha = 42°38'16''$. Să se determine volumul acestui con.

39. Un cerc cu raza $R = 5{,}38\ dm$ serveşte de bază comună a două conuri construite de aceiaş parte a bazei lor comune. Generatoarea unui con formează cu planul bazei un unghi $\alpha = 74°28'$, iar generatoarea celuilalt con formează cu acelaş plan un unghi $\beta = 60°12'$. Determinaţi volumul cuprins între suprafeţele laterale ale acestor conuri.

Trunchiul de con.

40. Generatoarea unui trunchi de con este înclinată pe planul bazei cu raza R sub un unghi α; raza celeilalte baze este r. Să se afle volumul trunchiului de con.

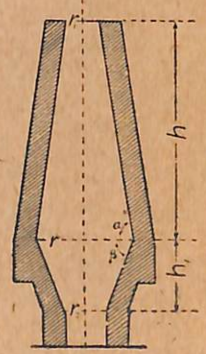


Fig. 41.

41. Intr'un trunchi de con, în care raportul suprafeţelor bazelor este 4, generatoarea are lungimea l şi este inclinată pe planul bazei sub un unghi φ. Să se determine volumul conului.

42. In figura 41 este dată secţiunea longitudinală a unui cuptor înalt. Cavitatea cuptorului este compusă din două trunchiuri de con. Deschizăturile de sus şi de jos au raza r_1 şi raza r_2. Unghiurile inclinării generatoarei pe bază sînt α şi β. Volumul total este V. Să se determine raza bazei comune r a conurilor şi înălţimile lor h şi h_1 ($2r_1 = 4{,}2\ m$; $2r_2 = 4{,}9\ m$; $\alpha = 86°$; $\beta = 76°$; $V = 572{,}6\ m^3$).

43. Intr'un trunchi de con se află un con întreg, care are cu el baza mai mică comună, înălţimea comună şi generatoarele, respectiv paralele generatoarelor lui. Să se determine volumul trunchiului de con, cînd ştim că cel mai mare unghi dintre prelungirea generatoarelor lui, fiecare lungă de $a = 24{,}9\ dm$, este $\alpha = 65°49'48''$.

44. Intr'un trunchi de con, diagonalele secţiunii axiale sînt perpendiculare una pe alta, iar generatoarea formează cu planul bazei mai mari un unghi α şi este egală cu l. Să se determine volumul acestui trunchi de con ($l = 12$; $\alpha = 70°20'$).

§ 22. Sfera şi părţile de sferă.

Sfera.

1. Raza globului pămîntesc este de 6370 *km*. Moscova se găseşte la al 56° al latitudinei de nord. Să se afle raza paralelei la această latitudine.

2. Raza globului pămîntesc este de 6370 *km*. Să se afle lungimea tropicului (23°27′ latitudine) şi a cercului polar (66°33′ latitudine).

3. Un observator, aflîndu-se pe vîrful unui munte în punctul A (fig. 42), a măsurat unghiul $DAC = \alpha$ format de raza vizuală AC, care are direcţia spre orizont, şi linia verticală AD. Cunoscînd raza r a pămîntului, să se determine înălţimea $AD = x$ a muntelui.

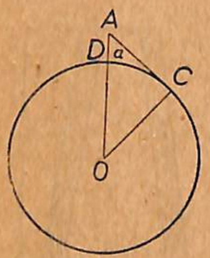


Fig. 42.

4. Intr'o sferă cu volumul $V = 53{,}377\ dm^3$, e înscris un con. Unghiul format de două generatoare ale conului, duse pe capetele unui diametru al bazei, este $\alpha = 42°18'$. Să se determine volumul conului.

5. Generatoarea unui con formează cu axa lui $\angle \alpha = 35°18'20''$. Să se determine raportul dintre volumul acestui con şi volumul sferei circumscrise lui.

6. Latura bazei unei piramide regulate de n laturi, este egală cu a, unghiul diedru dela bază $= \varphi$. Să se determine raza sferei înscrise în piramidă.

7. Să se determine raza sferei circumscrise unei piramide regulate de n laturi, dacă latura bazei este a şi muchia laterală este inclinată pe planul bazei sub un unghi α ($n = 8$; $a = 3{,}5\ m$; $\alpha = 58°37'42''$).

8. O piramidă are ca bază un romb cu latura a şi unghiul ascuţit α; unghiurile diedre la bază sînt egale cu φ. Să se determine raza sferei înscrise în această piramidă.

9. Intr'un con se dă lungimea C a circonferinţei bazei şi unghiul α dintre generatoare şi bază. Să se determine lungimea liniei pe care se ating una de alta suprafaţa laterală a conului şi suprafaţa sferei înscrise în el.

10*. Dintr'un punct de pe suprafaţa unei sfere s'a dus în acea sferă trei coarde egale sub un unghi α una pe alta. Să se determine lungimea lor, dacă raza sferei este egală cu R.

11. Să se determine într'un con unghiul dintre generatoare şi planul bazei, dacă suprafaţa bazei, suprafaţa sferei înscrise şi suprafaţa laterală a conului formează o progresie aritmetică.

12. Să se determine unghiul dintre generatoarea şi planul bazei unui con care e de m ori mai mare decît sfera înscrisă în el. (Să se afle valoarea cea mai mică a lui m; să se calculeze unghiul, dacă $m = 2\frac{1}{4}$).

13. Secţiunea transversală a unui con, care împarte volumul lui în două jumătăţi, trece prin centrul sferei circumscrise. Să se afle unghiul dintre generatoare şi planul bazei.

14. Să se determine unghiul dela vîrf în secţiunea axială a conului circumscris în jurul a patru sfere egale, aşezate astfel că fiecare atinge pe celelalte trei.

15. In jurul unei sfere s'a circumscris un trunchi de con, a cărui suprafaţă laterală se rapoartă la suprafaţa sferei ca $m:n$. Să se determine unghiul dintre generatoarea şi baza mai mare ($m:n = 2:1$).

16. Să se determine raza unei sfere circumscrise în jurul unui trunchi de con, în care razele bazelor sînt R şi r, iar generatoarea este inclinată pe planul bazei de jos sub unghiul α.

17. Intr'un trunchi de con cu razele bazelor r_1 şi r_2 ($r_1 > r_2$) s'a înscris o sferă. Să se determine: 1) suprafaţa sferei şi 2) unghiul inclinării generatoarei conului pe planul bazei lui.

18. Intr'un con sînt aşezate două sfere, astfel că ating una pe alta şi suprafaţa conului (fig. 43). Raportul razelor EM şi ON ale sferelor este $m:n$. Să se determine mărimea unghiului ABC dela vîrful secţiunii, duse prin axa conului ($m:n = 3:1$).

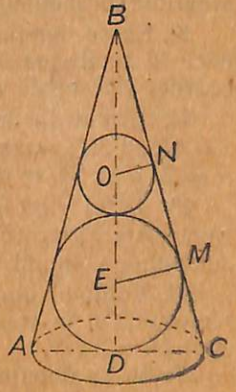


Fig. 43.

19. Raza bazei unui con este egală cu R, generatoarea e inclinată pe planul bazei sub un unghi α. In acest con s'a înscris un şir de sfere astfel încît prima sferă atinge suprafaţa laterală a conului şi baza lui, iar fiecare din sferele următoare atinge suprafaţa la-

terală a conului şi sfera premergătoare. Să se afle limita spre care tinde suma volumurilor acestor sfere, dacă numărul lor se măreşte la infinit.

Părţi de sferă.

20. Un vas de forma unei sfere e umplut cu un lichid oarecare pînă lat înălţimea z; greutatea specifică a lichidului este d. Arcul AB (fig. 44) e de $\varphi°$. Raza (interioară) a vasului e egală cu R. Să se afle greutatea lichidului.

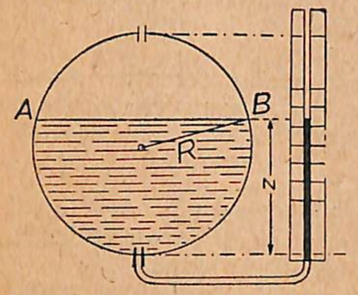


Fig. 44.

21. Un rezervoar pentru gaz e alcătuit dintr'un cilindru acoperit pe deasupra cu un segment sferic. Dimensiunile interioare ale cilindrului sînt: diametrul de $24\ m$, înălţimea de $6\ m$. Arcul în secţiunea axială a segmentului sferic, care acoperă cilindrul, conţine $73°44'$. Să se afle capacitatea rezervoarului.

22. Intr'un strat sferic cu bazele egale, suprafaţa laterală este echivalentă cu suma bazelor. Să se determine mărimea arcurilor în secţiunea axială a acestui strat.

23. Să se determine suprafaţa curbă a unui segment sferic, dacă în secţiunea lui axială arcul este egal cu α, iar lungimea coardei este egală cu a.

24. Arcul în secţiunea axială a unui segment sferic $\alpha = 65°28'36''$; raza sferei, de care e despărţit segmentul, $R = 24\ dm$. Să se determine suprafaţa curbă a segmentului.

25. Arcul unui segment în secţiunea axială a unui sector sferic este α, iar coarda care subîntinde arcul este b. Să se determine volumul sectorului ($b = 25{,}135$; $\alpha = 63°17'36''$).

26. Volumul unei sfere este V. Să se determine volumul sectorului ei în care unghiul la centru în secţiunea axială este egal cu α.

27. Să se determine suprafaţa totală a unui sector sferic cu unghiul α la vîrf şi raza R.

28. Intr'o suprafaţă de forma unui con s'a înscris o sferă; linia de tangenţă împarte suprafaţa acestei sfere în raportul $m:n$. Să se determine inclinarea generatoarei pe axă în suprafaţa de forma de con ($m:n = 1:3$).

29. Un sector circular cu arcul α (mai mic de $180°$) se învîrteşte în jurul diametrului care trece în exteriorul lui; volumul corpului obţinut este în acelaş raport cu volumul unei sfere de aceiaş rază după cum este $m:n$. Să se determine unghiul mai mic din cele formate de diametru cu razele laterale ale sectorului ($\alpha = 90°$; $m:n = \sqrt{3}:\sqrt{8}$).

30. Raza unui sector sferic este R, unghiul cel mai mare dintre raze este α. Să se determine volumul şi suprafaţa sferei înscrise în sector.

§ 23. Corpurile care se capătă prin rotaţie.

Corpurile căpătate prin rotaţie, care se reduc la cilindri şi conuri.

1. Intr'un triunghi se dă: latura a şi unghiurile B şi C. Să se determine suprafaţa şi volumul corpului obţinut prin învîrtirea triunghiului în jurul laturii date.

2. Suprafaţa unui triunghi isoscel $Q = 50\ dm^2$, iar unghiul dela vîrf $\beta = 100°26'24''$. Să se calculeze suprafaţa totală a corpului care s'a obţinut prin învîrtirea acestui triunghi în jurul unei drepte perpendiculare pe bază şi dusă prin unul din capetele ei.

3. Să se determine volumul unui corp căpătat prin învîrtirea triunghiului ABC în jurul axei, care trece prin vîrful A, şi latura paralelă BC, dacă ştim că $BC = a = 23{,}543\ dm$, proecţia laturii AB pe axa învîrtirii $b = 7{,}3345\ dm$, iar unghiul dintre AB şi axă este $\alpha = 18°36'47''$.

4. Un triunghi regulat cu latura a se învîrteşte în jurul unei axe care trece în exteriorul lui prin capătul unei laturi a lui sub un unghi ascuţit α pe acea latură. Să se determine suprafaţa corpului de rotaţie.

5. Un triunghi isoscel, a cărui latură laterală este b şi unghiul dela vîrf α, se învîrteşte în jurul unei laturi laterale. Să se determine volumul şi suprafaţa corpului de rotaţie ($\alpha = 120°$).

6. Un romb cu latura a şi unghiul ascuţit α se învîrteşte în jurul unei axe care trece prin vîrful unui unghi ascuţit perpendicular pe latura lui. Să se determine suprafaţa şi volumul corpului de rotaţie.

7*. O linie plană frîntă e alcătuită din n segmente egale de a lungime, reunite în chip de zigzag sub un unghi α unul de altul. Să se determine suprafaţa care se capătă prin învîrtirea acestei linii în jurul unei axe care trece prin unul din capetele ei paralel cu bisectriţa unghiului α.

8. Intr'un triunghi se dă laturile b şi c şi unghiul dintre ele α; acest triunghi se învîrteşte în jurul unei axe, care trece

în exteriorul lui prin vîrful unghiului α şi este egal inclinată pe laturile b şi c. Să se determine volumul corpului de rotaţie.

9. Intr'un triunghi se dă baza a şi unghiurile alăturate α şi $90^\circ + \alpha$. Să se determine volumul corpului căpătat prin învîrtirea acestui triunghi în jurul înălţimii sale.

10. Dela capătul B al diametrului AB al unei semicirconferinţe de raza R s'a măsurat arcul BC egal cu α (mai mic de 90°) şi prin punctul C s'a dus o tangentă pînă la întîlnire cu prelungirea diametrului AB în punctul D; afară de aceasta, punctul C e reunit cu A. Să se determine volumul corpului care se capătă prin învîrtirea triunghiului ACD în jurul laturii AD.

11. Se dau unghiurile triunghiului ABC. Să se determine în ce raport sînt între ele volumurile V_a, V_b şi V_c ale corpurilor căpătate prin învîrtirea succesivă a acestui triunghi în jurul laturilor a, b şi c.

12. Două triunghiuri: unul isoscel cu unghiul dela vîrf $\alpha = 54^\circ 17' 36''$ şi altul echilateral se găsesc în acelaş plan şi au baza comună $b = 25{,}345$ *cm*. Să se determine volumul şi suprafaţa corpului obţinut prin învîrtirea acestui sistem de triunghiuri în jurul unei axe, care trece prin unul din vîrfurile comune ale triunghiurilor date paralel cu înălţimea triunghiului isoscel.

13. Suprafaţa unui triunghi dreptunghi este egală cu S; unul din unghiurile ascuţite este egal cu α. Prin vîrful acestui unghi ascuţit s'a dus o dreaptă perpendiculară pe ipotenuză şi situată în planul triunghiului. Să se determine volumul V al corpului căpătat prin învîrtirea triunghiului în jurul acestei axe.

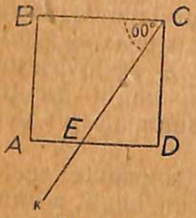


Fig. 45.

14. Să se determine volumul şi suprafaţa corpului căpătat prin învîrtirea unui dreptunghi în jurul axei, care trece prin unul din vîrfurile lui perpendicular pe diagonala d, care formează cu latura un unghi α ($d = 34{,}06$ *m*; $\alpha = 56^\circ 14' 18''$).

15. Prin vîrful C al pătratului $ABCD$ (fig. 45), a cărui latură este a, s'a dus o dreaptă Cx, care formează cu latura BC un unghi $BCx = 60^\circ$ şi întretae latura AD în punctul E. Să se determine volumul corpului căpătat prin învîrtirea patrulaterului $EABC$ în jurul dreptei Cx.

16. Perimetrul unui triunghi dreptunghi este de $2p = 27{,}425$ *dm*, unul din unghiurile triunghiului este $\alpha = 41^\circ 15' 32''$. Să se

determine volumul corpului obţinut prin învîrtirea triunghiului în jurul ipotenuzei.

17. Intr'un trapez dreptunghi, în care este înscris un cerc cu raza r, unghiul ascuţit este α. Să se determine suprafaţa laterală a corpului căpătat prin învîrtirea acestui trapez în jurul laturii mai mici din cele neparalelele.

18. Diagonala unui paralelogram, dusă din vîrful unghiului obtuz, formează un unghi β cu latura lui mai mică; distanţa dintre laturile mai mari ale paralelogramului este h. Să se determine volumul corpului căpătat prin învîrtirea paralelogramului în jurul unei axe care trece prin vîrful unghiului său ascuţit α, paralel cu diagonala dată.

19. Un poligon regulat cu un număr pereche (n) de laturi se învîrteşte în jurul unei drepte care uneşte două vîrfuri opuse. Să se exprime suprafaţa şi volumul corpului de rotaţie: 1) după raza r a cercului înscris, 2) după raza R a cercului circumscris şi 3) după latura a a poligonului.

20. Un poligon regulat cu un număr pereche (n) de laturi se învîrteşte în jurul unei drepte care uneşte mijlocurile a două laturi opuse. Să se reprezinte suprafaţa şi volumul corpului de rotaţie: 1) după raza r a cercului înscris, 2) după raza R a cercului circumscris şi 3) după latura a a poligonului.

21. Un poligon regulat cu un număr nepereche (n) de laturi se învîrteşte în jurul unei drepte care uneşte mijlocul unei laturi cu vîrful opus. Să se exprime suprafaţa şi volumul corpului de rotaţie: 1) după raza r a cercului înscris, 2) după raza R a cercului circumscris şi 3) după latura a a poligonului.

Corpuri de rotaţie care conţin părţi de sferă.

22. Să se determine volumul V şi suprafaţa totală S a corpului căpătat prin învîrtirea unui segment de raza R în jurul diametrului care trece prin capătul arcului său α.

23. Să se determine volumul corpului căpătat prin învîrtirea unui sector circular cu unghiul la centru α în jurul diametrului $2r$ al cercului, de care e despărţit sectorul, formînd unghiul β cu raza din mijlocul sectorului.

24. Un sector circular, care cuprinde unghiul α, se învîrteşte în jurul diametrului, care este perpendicular pe raza din mijlocul acestui sector. Suprafaţa sectorului este egală cu Q. Să se determine suprafaţa corpului de rotaţie ($\alpha = 70^\circ 36'$; $Q = 211{,}8$).

25. Din capătul diametrului unei sfere s'a dus o coardă, astfel încît suprafaţa formată prin învîrtirea ei în jurul diametrului împarte volumul sferei în două părţi egale. Să se determine unghiul α dintre coardă şi diametru.

26*. Un segment circular, care cuprinde arcul α şi coarda a, se învîrteşte în jurul diametrului care e paralel cu coarda. Să se determine suprafaţa şi volumul corpului de rotaţie.

Tabla funcţiilor trigonometrice.

°	sin	tg	ctg	cos	°
0	0,000	0,000	∞	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0 839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
°	cos	ctg	tg	sin	°

RĂSPUNSURILE.

§ 1.

1. $-120°$; $-1440°$. **2.** $1080°$; $10\,800°$. **3.** $5°$; $150°$; $720°$; $1500°$. **5.** $360°$.
6. 1) $120° + 360°n$; 2) $-60° + 360°n$, sau $300° + 360°n$; 1) $120°$, $480°$, $840°$,...
7. 1) 1,57 *cm*; 2) $\frac{\pi R\alpha}{180}$. **8.** 1) a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{3}{4}\pi$; e) $\frac{\pi}{12}$;
f) $\frac{\pi}{8}$; g) $\frac{\pi}{5}$; h) $\frac{5}{12}\pi$; i) $\frac{3}{5}\pi$; k) $\frac{5}{6}\pi$; l) $\frac{7}{8}\pi$; m) $0{,}9\,\pi$.
2) a) 0,8901; b) 0,4712; c) 1,3352; d) 0,2182; e) 0,5009; f) 1,2802;
g) 2,0420; h) 3,7737. 3) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{5}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{\pi(n-2)}{n}$
9. 1) $85°57'$; $114°35'$; $42°58'$; $30°$; $120°$; $270°$; $22°30'$; $135°$; $216°$.
2) $40°$; $75°$; $13°30'$; $57°42'$; $218°$; $27°30'$; $74°29'$; $45°50'$.
10. 1) $10\pi = 31{,}4$; 2) 6,28 *m/sec*; 3) 37,7 *m/sec*. **11.** ≈ 200.

§ 2.

1. In primul; nu. **4.** Dela 0 pînă 2. **5.** Numai 1-a. **6.** Nu. **7.** 0. **8.** c.
9. $a - b + c$. **10.** $(a-b)^2$. **11.** $a^2 - b^2$. **12.** 0. **13.** $\pm\infty$.
14. 1) 0,6; 2) $-0{,}5$; 3) $-0{,}7$; 4) 0,9; 5) 1,7; 6) $-2{,}7$.
15. 1, 3, 7 — negative; 2, 4, 5, 6, 8 — pozitive.
16. 1) $\cos 20°$; 2) $\sin 50°$; 3) $\operatorname{ctg} 40°$; 4) $\operatorname{tg} 50°$.
21. 1) $15°$; $135°$; $255°$; 2) $300°$; 3) $50°$; $110°$; $170°$; $230°$; $290°$; $350°$;
4) $120°$; 5) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; $1\frac{1}{6}\pi$; $1\frac{5}{6}\pi$; 6) $\frac{\pi}{12}$; $1\frac{5}{12}\pi$; 7) $45°$; $135°$; 8) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2}{3}\pi$
22. 1) $69° + 180°n$; 2) $-39° + 180°n$; 3) $\pm 26° + 360°n$; 4) $\pm 132° + 360°n$;
5) $15° + 360°n$ și $165° + 360°n$, sau $(-1)^n \cdot 15° + 180°n$;
6) $-45° + 360°n$ și $-135° + 360°n$, sau $(-1)^{n+1} \cdot 45° + 180°n$.
23. $\sin x = -1$. **24.** $\cos x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. **25.** $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
26. $\sin x = 0$. **27.** $\operatorname{tg} x = 0$; 2. **28.** $\sec x = 2$.
29. $\operatorname{ctg} x = 0$. **30.** $\operatorname{tg} x = \pm\infty$. **31.** Imposibil.
32. $\operatorname{arc\,tg} m + 180°n$; m este egal cu orice număr; 2) $\pm \operatorname{arc\,cos} m + 360°n$; $-1 \leqq m \leqq 1$; 3) $(-1)^n \operatorname{arc\,sin} m + 180°n$; $-1 \leqq m \leqq 1$.
33. 1) $\frac{\pi}{6} = \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2}$; 2) $-45° = \operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $90° = \operatorname{arc\,cos} 0$; 5) $-\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}(-1)$; 6) $0 = \operatorname{arc\,tg} 0$;
7) $30° = \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}$; 8) $0 = \operatorname{arc\,ctg}\infty$.
34. 1) $47°$, sau 0,8203; 2) $66°30'$, sau 1,1606; 3) $74°47'$, sau 1,3052;
4) $62°54'$, sau 1,0978.
35. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $3 \sin a$; 5) $a \cos\frac{b}{c}$; 6) $\frac{1}{\operatorname{tg} a}$.

§ 3.

№ problemei	1	2	3	4
$\sin\alpha$	$(\sin\alpha)$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$(\cos\alpha)$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$(\operatorname{tg}\alpha)$	$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$(\operatorname{ctg}\alpha)$
$\sec\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$
№ problemei	5	6	7	8
$\sin\alpha$	(0,8)	$(-0{,}3)$	$\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\pm\frac{4}{5}$
$\cos\alpha$	$\pm 0{,}6$	$\pm\frac{\sqrt{91}}{10}$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{3}{5}\right)$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\frac{4}{3}$	$\mp\frac{3}{\sqrt{91}}$	$\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\mp\frac{4}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm 0{,}75$	$\mp\frac{\sqrt{91}}{3}$	$\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\mp\frac{3}{4}$
$\sec\alpha$	$\pm\frac{5}{3}$	$\pm\frac{10}{\sqrt{91}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{3}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	1,25	$-\frac{10}{3}$	$\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$	$\pm\frac{5}{4}$

№ problemei	9	10	11	12
sin α	$\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\mp\frac{9}{41}$	$\pm\frac{15}{17}$	$\pm\sqrt{0,1}$
cos α	$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\pm\frac{40}{41}$	$\pm\frac{8}{17}$	$\mp\sqrt{0,9}$
tg α	$(\sqrt{5})$	$\left(-\frac{9}{40}\right)$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{1}{3}$
ctg α	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{40}{9}$	$\left(\frac{8}{15}\right)$	(-3)
sec α	$\pm\sqrt{6}$	$\pm\frac{41}{40}$	$\pm\frac{17}{8}$	$\mp\frac{\sqrt{10}}{3}$
cosec α	$\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$	$\mp\frac{41}{9}$	$\pm\frac{17}{15}$	$\pm\sqrt{10}$
№ problemei	13	14	15	16
sin α	$\pm\frac{\sqrt{8}}{3}$	$\pm\frac{21}{29}$	$\frac{5}{13}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
cos α	$\frac{1}{3}$	$-\frac{20}{29}$	$\pm\frac{12}{13}$	$\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
tg α	$\pm\sqrt{8}$	$\mp\frac{21}{20}$	$\pm\frac{5}{12}$	$\mp\sqrt{\frac{1}{2}}$
ctg α	$\pm\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\mp\frac{20}{21}$	$\pm 2,4$	$\mp\sqrt{2}$
sec α	(3)	$\left(-1\frac{9}{20}\right)$	$\pm\frac{13}{12}$	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$
cosec α	$\pm\frac{3}{\sqrt{8}}$	$\pm\frac{29}{21}$	(2,6)	$(-\sqrt{3})$

№ problemei	17	18	19	20
sin α	$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$	$\pm\frac{b}{a}$	$\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{99}{101}$
cos α	$\pm\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$	$\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$	$\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{20}{101}$
tg α	$\pm\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$	$\pm\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)$	$\left(4\frac{19}{20}\right)$
ctg α	$\pm\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$	$\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{20}{99}$
sec α	$\pm\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$	$\frac{101}{20}$
cosec α	$\frac{a+b}{a-b}$	$\pm\frac{a}{b}$	$\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	$\frac{101}{99}$
№ problemei	21	22	23	
sin α	0,96	$\left(-\frac{12}{13}\right)$	$-\frac{20}{29}$	
cos α	(−0,28)	$-\frac{5}{13}$	$\frac{21}{29}$	
tg α	$-\frac{24}{7}$	$\frac{12}{5}$	$-\frac{20}{21}$	
ctg α	$-\frac{7}{24}$	$\frac{5}{12}$	(−1,05)	
sec α	$-\frac{25}{7}$	$-\frac{13}{5}$	$\frac{29}{21}$	
cosec α	$\frac{25}{24}$	$-\frac{13}{12}$	−1,45	

24. $\cos^2\alpha$. 25. $\sin^2\alpha$. 26. $1-\cos\alpha$.
27. $-(1+\sin\alpha)$. 28. $\sec^2\alpha$. 29. $\cos^2\alpha$.
30. a) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$; b) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$. 31. a) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; b) $\operatorname{tg}^2\alpha$.
32. $\cos\alpha$. 33. $\sin\alpha$. 34. $\sec\alpha$. 35. $\operatorname{tg}\alpha$. 36. $\operatorname{ctg}\alpha$.
37. $\operatorname{cosec}\alpha$. 38. $\cos\alpha$. 39. $\operatorname{tg}^2\alpha$.
40. $2\sin^2\alpha$. 41. $2\cos^2\alpha$. 42. 1. 43. 1.
44. $\operatorname{tg}^2\alpha$. 45. $\sec^2\alpha$. 46. $\sec^2\alpha$. 47. $\operatorname{cosec}^3\beta$.
48. $\operatorname{cosec}^2\alpha$. 49. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. 50. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$. 51. 4.
52. $\operatorname{ctg}^6\alpha$. 53. a) $2\sin^2\alpha-1$; b) $1-2\cos^2\alpha$. 54. $\frac{1}{\sin\alpha\,\cos\alpha}$.
55. $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. 56. $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$. 57. a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}$; b) $\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$.
58. a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; b) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$. 59. $\sec\alpha=-\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$
60. 9. 61. $\frac{m^2-1}{2}$. 62. m^2-2 şi m^3-3m.
93. $\pm 90°+360°n$. 94. $\pm 60°+360°n$. 95. $\pm 52°+360°n$.
96. $360°n$. 97. $\pm 128°+360°n$. 98. $\mp 52°+360°n$.
99. $180°n$. 100. $63°+180°n$ şi $-27°+180°n$.
101. $(-1)^n\cdot 24°+180°n$. 102. $\pm 90°+360°n$ şi $\pm 60°+360°n$.
103. $\pm 120°+360°n$. 104. $27°+180°n$. 105. $\pm(-1)^n\cdot 45°+180°n$.
106. $\pm 30°+180°n$ şi $\pm 150°+360°n$ 107. $\mp(-1)^n\cdot 60°+180°n$.
108. $360°n$ şi $90°+360°n$. 109. $45°+180°n$. 110. $60°+180°n$.
111. $\pm 30°+180°n$. 112. $45°+180°n$ şi $-72°+180°n$.
113. $70°+180°n$ şi $-36°+180°n$.

§ 4.

1. 1) $\cos 17°$; 2) $\sin 9°20'$; 3) $\operatorname{ctg} 20°34'20''$; 4) $\operatorname{tg} 30°1'$.
2. 1) $\sin 67°40'$; 2) $-\cos 80°34'25''$; 3) $-\operatorname{tg} 71°11'24''$; 4) $-\operatorname{ctg} 39°20'$.
3. 1) $\cos 31°40'$; 2) $\sin 16°25'$; 3) $-\cos 21°43'$; 4) $-\sin 8°21'$; 5) $-\operatorname{tg} 19°32'28''$; 6) $-\operatorname{ctg} 16°32'$; 7) $-\operatorname{tg} 30°28'40''$; 8) $-\operatorname{ctg} 39°18'$.
4. -1. 5 $\cos\alpha$. 6. $-\cos\alpha$. 7. $-\sec\alpha$. 8. 0. 9. 0. 10. 1. 11. $-\sin^2\alpha$.
12. 0. 13. $2\cos\alpha$. 14. 1.

§ 5.

1.	2.	3.	4.
1) 0,2588;	1) 0,3640;	1) 0,4226;	1) 2,747;
2) 0,7071;	2) 1;	2) 0,7071;	2) 1;
3) 0,8660;	3) 11,43;	3) 0,8660;	3) 1,3032;
4) 0,9563;	4) 3,172;	4) 0,2924;	4) 0,3365;
5) 0,6225;	5) 0,3191;	5) 0,7826;	5) 0,3796;
6) 0,9361;	6) 1,3375;	6) 0,9373;	6) 2,805;
7) 0,2051;	7) 0,3799;	7) 0,4823;	7) 0,0305;
8) 0,9988.	8) 8,284;	8) 0,1947;	8) 11,43;

9) 12,61;	9) 0,9987;	9) 23,37;
10) 38,19;	10) 0,9997.	10) 0;
11) 286,5;		11) 30,41.
12) 3438.		

5. 1) 20°; 2) 36°30′; 3) 57°21′: 4) 68°20′; 5) imposibil; 6) 23°9′.
6. 1) 24°; 2) 85°; 3) 69°30′; 4) 28°36′; 5) 79°48′; 6) 26°34′; 7) 22°47′; 8) 85°34′; 9) 81°25′.
7. 1) 27°; 2) 24°30′; 3) 50°30′; 4) imposibil; 5) 35°2′; 6) 63°21′.
8. 1) 20°; 2) 67°30′; 3) 29°29′; 4) 33°47′; 5) 55°13′; 6) 30°33′; 7) 8°; 8) 5°35′; 9) 2°52′.
9. 0,9659; 0,1368; 0,6395; 0,9036. 10. −0,4695; −0,9171; −0,1513; −0,9825.
11. −1,6643; −0,3561; −4,836; −0,6334.
12. −11,43; −0,6873; −6,472; −0,3876.

§ 6.

1. 1) $\sin\alpha=0{,}96$; $\operatorname{tg}\alpha=3\frac{3}{7}\approx 3{,}429$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$; $\cos\alpha=0{,}8$; 3) $\operatorname{tg}\beta\approx 6{,}462$; $\cos\beta\approx 0{,}1529$.
2. $\sin\beta=\frac{77}{85}$; $\cos\beta=\frac{36}{85}$; $\operatorname{tg}\beta=2\frac{5}{36}$; $\operatorname{ctg}\beta=\frac{36}{77}$. 3. 1) 20,4 *cm*; 2) 68 *cm*.
4. 1) 10,08 *m*; 2) 30,6 *dm*. 5. 1) 2,56 *km*; 2) 2,39 *km*. 6. 947 *m*.
7. 12°43′. 8. 3647 *m* ≈ 3600 *m*. 9. 20 *m*. 10. 35,5 *m*. 11. 27,25 *m*. 12. 1°54′.
13. 4°55′. 14. 2°57′; 727 *m*. 15. $b\sin\alpha-a=10{,}5$ *m*.
16. 3,9 *m*. 18. 33°41′. 19. ≈ 40 *m*.
20. 1) 63°26′; 2) 26°34′; 3) 21°48′. 21. $\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n-1}=47°52'$.
22. 30°58′. 23. $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$. 24. 33°41′.
25. 21 *cm*. 26. 1278 *m*. 27. $r=1{,}58$ *m*; $x=1{,}97$ *m*.
28. $\frac{a}{2\cos\beta}$. 29. 6°51′; 105,2 *mm*. 30. $h=10(D-d)$; 2°52′.
31. 38°40′. 32. 63 *m*. 33. 2,6 *m*.
34. 36°39′. 35. 73°58′. 36. 2,698.
37. 47°16′; 32,8 *m*. 38. 97°10′.
39. $\frac{c}{2\pi}\cdot\cos\frac{180°\,m}{m+n}\approx 11{,}2$
40. $\frac{a}{2\sin\alpha}$. *Indrumare*. Diametrul să se ia ca una din laturile unghiului.
41. 52°15′; 7,141 *kg*. 42. $b(1+\sec\alpha)$. 43. $\operatorname{arc\,sin}\frac{h}{b}$.
44. 48°47″. 45. 78°42′.
46. 69°15′ cu direcţie spre nord.

47.

α	5 *dm*	15 *dm*
40°	3,2 *dm*	9,6 *dm*
60°	4,3 „	13,0 „
90°	5 „	15 „

48. 26,6 *km* spre răsărit şi 21,7 *km* spre nord. 49. 40°13′ şi 49°47′.
50. 57°28′. 51. 67°49′ şi 22°11′. 52. 120°30′ şi 59°30′.
53. $OB \approx 0{,}35\ m$; $AB \approx 0{,}2\ m$; $\beta = 5°44'$; $BP \approx 1{,}99$;
3) 0; 1°59′; 3°55′; 5°44′; 7°23′; 8°49′; 9°59′; 10°50′; 11°22′; 11°32′;
5) 11°19′; 6) 0; 5 *mm*; 22 *mm*;
48 *mm*; 83 *mm*; 125 *mm*; 173 *mm*; 224 *mm*; 277 *mm*; 330 *mm*.
54. 47°30′. 55. $\alpha = 40°42'$; $\beta = 19°14'$.
56. 1) 82°27′; 2) 8°43′. 57. 53°8′.
58. $R = \dfrac{a}{2\cos\frac{\beta}{2}}$; $r = a \sin\dfrac{\beta}{2} \operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\beta}{4}\right)$.
59. $\alpha = \arcsin\dfrac{h}{b}$; $a = \dfrac{h}{\cos\alpha}$; $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$. 60. 11°26′.
61. 28°; 37°; 19°; 53°; 86°; 113°. 62. 21 750 *km*.
63. 4°52′. 64. 1°11′. 65. 51°5′.

§ 7.

1. 1) $b = 61$; $c = 102$; 2) $a = 39$; $b = 25$. 2. 78,7 *m*. 3. 21,1 *m*.
4. $\dfrac{b\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$. 5. $\dfrac{l\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}$. 6. $\dfrac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ şi $\dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
7. $l_b = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)}$; $l_c = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}$; $l_a = \dfrac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$.
8. $\dfrac{c\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \approx 146{,}4\ m$.
9. $a = \dfrac{h_a\sin\alpha}{\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma)}$; $b = \dfrac{h_a}{\sin\gamma}$; $c = \dfrac{h_a}{\sin(\alpha+\gamma)}$.
10. $7880 m^2$. 11. $\dfrac{1}{2} b^2 \sin\alpha \approx 48\ m^2$.
12. Dacă $\gamma = 90°$. 15. $a^2\sin\alpha \approx 21\ cm^2$.
16. $\dfrac{d^2\sin\varphi}{2}$; maximum egal $\dfrac{d^2}{2}$, dacă $\varphi = 90°$.
17. $\dfrac{a+b}{2}\cdot c\sin\alpha$. 18. 50°33′ şi 129°27′. 19. 46°56′ şi 133°4′.
20. $360° m^2$. 21. $AE = \sqrt{\dfrac{2Q\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}}$; $AD = \sqrt{\dfrac{2Q\sin\gamma}{\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)}}$.

22. $\dfrac{h_a h_b}{2\sin\gamma}$. 23. $\dfrac{h_b^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. 24. $a = 8{,}5$.
25. 1) $c = 22$; $\alpha = 22°12'$; $\beta = 34°31'$; 2) $b = 0{,}4$; $\alpha = 11°29'$; $\gamma = 145°3'$; 3) $b = 63$; $\alpha = 153°16'$; $\gamma = 10°16'$.
26. 77 *m*. 27. 117°17′. 28. 8,1 *m* şi 4,0 *m*.
29. 275 *kg*; 16°17′ şi 33°43′. 30. 1633 *m*.

§ 8.

1. $\cos 162°30' = -\cos 17°30'$. 2. $\sin 340° = -\cos 70°$.
3. $\sin 75° = \cos 15°$; $\sin 150° = \sin 30°$.
4. a) $-\sin 20°$; b) $\cos 10°$; c) $\sin 30°$; d) $\cos 20°$.
5. e) $\operatorname{ctg} 30°$; f) $-\operatorname{tg} 40°$; g) $\operatorname{ctg} 45°$; h) $\operatorname{tg} 30°$.
6. i) $-\operatorname{cosec} 10°$; k) $\sec 10°$; l) $\operatorname{cosec} 40°$; m) $-\sec 10°$.
7. a) $\cos 0{,}2\pi$; b) $\cos\dfrac{2}{9}\pi$; c) $-\operatorname{tg}\dfrac{2}{11}\pi$; d) $-\sec 0{,}1\pi$.
8. a) 1; b) 1; c) 0; d) 0. 9. a) $-\dfrac{1}{2}$; b) 0; c) $\sqrt{3}$; d) -1.
10. $\cos 50° = -\cos 130°$. 11. $-2\operatorname{ctg}\alpha$. 12. $2\cos\alpha$. 13. 1.
14. -1. 15. $a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha$. 16. $-\operatorname{tg}^3\alpha$.
17. $\operatorname{ctg}\alpha$. 18. $\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$. 19. 0. 20. $\operatorname{ctg}^2 42°$.
21. $-\operatorname{ctg}^2 40°$.
22. $\sin(\alpha - 90°) = -\cos\alpha$; $\cos(\alpha - 180°) = -\cos\alpha$; $\operatorname{tg}(\alpha - 360°) = \operatorname{tg}\alpha$.
23. $\cos x = -\dfrac{2}{3}$. 24. $\sin x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 25. $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 26. $360°\cdot n$.
27. $135° + 180°\cdot n$. 28. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$. 29. $\pi\cdot n \pm \dfrac{\pi}{4}$. 30. $90°(2k+1)$.

§ 9.

1. -1. 2. a) $\sin\alpha$; b) $-\sin\alpha$. 3. $0{,}4\sqrt{3} + 0{,}3$.
4. $\sqrt{0{,}2} - \sqrt{0{,}15}$. 5. $0{,}2 + \sqrt{0{,}63}$; $-\sqrt{0{,}21} - \sqrt{0{,}12}$.
6. $\dfrac{1}{12}(\sqrt{35} - 6)$; $\dfrac{1}{12}(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})$. 7. ± 1; $\pm 0{,}28$. 8. $\dfrac{1}{2}$.
9. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.
12. a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$ şi $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; b) $\dfrac{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$ şi $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}$.
13. $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;
$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$.
14. $\dfrac{56}{65}$ şi $\dfrac{57}{1625}$. 15. $\dfrac{1\pm\operatorname{tg}\alpha}{1\mp\operatorname{tg}\alpha}$. 16. $-(2+\sqrt{3})$. 17. $-\dfrac{1}{2}$.

18. -1 şi $\frac{1}{7}$. 19. $\frac{\mathrm{ctg}\beta \pm \mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta \mp 1}$. 20. a) $\frac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\beta \pm \mathrm{ctg}\alpha}$; b) $\frac{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}$.

21. $\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma - \mathrm{tg}\gamma \cdot \mathrm{tg}\alpha}$. 22. $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$.

23. $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta$. 24. $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta$. 25. $\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta$.

26. $\mathrm{tg}\,\alpha$. 41. $-45^\circ + 180^\circ n$. 42. $(-1)^n \cdot 60^\circ + 180^\circ n$.

43. $x = \mathrm{arc\ tg}\,(\mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\beta\ \mathrm{tg}\gamma) + 180^\circ n$. 44. $\pm 30^\circ + 180^\circ n$.

45. $x = 30^\circ + 360^\circ \cdot n$; $150^\circ + 360^\circ \cdot n$. 46. $x = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{a - b \cdot \mathrm{tg}\alpha}{a \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - b} + \pi n$.

47. $x = \mathrm{arc\,tg}\left(\pm\sqrt{\frac{m + \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + m\,\mathrm{tg}^2\alpha}}\right) + \pi n$. 48. $x = 180^\circ \cdot n$, sau $x = \pi n$.

49. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot n$. 50. $x = 90^\circ \cdot n$; $60^\circ \cdot n$. 51. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

52. $14^\circ 38' + 180^\circ n$. 53. $45^\circ + 180^\circ n$. 54. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

§ 10.

1. a) $\pm 0{,}96$; $-0{,}28$; b) $\frac{3}{4}$. 2. $\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$.

4. $-0{,}96$; $-0{,}28$. 5. $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$; $-\frac{1}{3}$. 6. $-\frac{3}{4}$.

7. a) $\pm 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $1 - 2\sin^2\alpha$; b) $\pm\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $2\cos^2\alpha - 1$.

8. a) $\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\alpha}$; b) $\frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. 9. $\frac{\sec^2\alpha}{2 - \sec^2\alpha}$.

10. a) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$; $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

11. $\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. *Indrumare.* Mai întîi scriem:

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} \text{ şi } \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

12. Fiindcă prin $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$ celelalte funcţii ale unghiului α se exprimă raţional, e de ajuns să considerăm $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$; despre ele vezi rezolvarea problemei 11.

13. $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; 2,4. 14. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 1.

15. $3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; $\frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha}$.

16. $4\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - 4\cos\alpha \cdot \sin^3\alpha$; $\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha$.

17. $\sqrt{0{,}9}$; $-\sqrt{0{,}1}$; -3.

18. $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$.

19. $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; $\sqrt{2} - 1$; $\sqrt{2} + 1$.

20. $\frac{3}{5}$ şi $\frac{4}{5}$. 21. $\frac{4}{5}$. 22. $\sqrt{5} - 2$.

25. Avem: $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$ şi $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$; de aici găsim:

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin\alpha} \text{ şi } \sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1 - \sin\alpha}.$$

Cu ajutorul acestor egalităţi căpătăm cîte *patru* valori pentru $\sin\frac{\alpha}{2}$ şi $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Dacă putem însă *alege* semnul atît înaintea unui radical cît şi înaintea celuilalt, adăogînd o condiţie nouă, problema va avea numai o *singură* rezolvare.

26. $\frac{-1 \pm \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}}{\mathrm{tg}\,\alpha}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha + 1}$. 27. -2.

52. $x = 15^\circ + 180^\circ \cdot n$; $75^\circ + 180^\circ \cdot n$, sau $x = \frac{\pi}{2} \cdot n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}$.

53. $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$. 54. $x = 22^\circ 30' + 90^\circ \cdot n$, sau $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n$.

55. $x = \pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

56. $x_1 = \pm 2\arccos 0 + 4\pi n$; $x_2 = 2 \cdot (-1)^n \arcsin\frac{b}{2a} + 2\pi n$.

57. $x = \pm 45^\circ + 360^\circ \cdot n$; $\pm 135^\circ + 360^\circ \cdot n$, sau $45^\circ + 90^\circ \cdot m$.

58. $x_1 = 360^\circ \cdot n$; $x_2 = \pm 120^\circ + 360^\circ \cdot n$, sau $x = 360^\circ \cdot n$; $120^\circ \cdot m$.

59. $x = \pm 30^\circ + 180^\circ \cdot n$. 60. $x = \pi n$. 61. $x = \pi n$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$.

62. $x_1 = \pm 2\arccos 0 + 4\pi n$; $x_2 = \pm 2\arccos\frac{b}{2a} + 4\pi n$.

63. $x = 360^\circ \cdot n$; $60^\circ + 720^\circ \cdot n$; $300^\circ + 720^\circ \cdot n$.

64. $x_1 = \pm 2\arccos 0 + 4\pi n$; $x_2 = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{a}{b} + 2\pi n$. 65. $x = 2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

66. $x = \pm\arccos\frac{m - 2 \pm \sqrt{m(m-8)}}{2(m+1)} + 2\pi n$.

67. $x_1 = x_2 = \pi(2n + 1)$; $x_3 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

68. $x = 180° \cdot n$; $\pm 30° + 180° \cdot n$. 69. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

70. $x = \pm 45° + 360° \cdot n$; $\pm 135° + 360° \cdot n$; $\pm 30° + 360° \cdot n$; $\pm 150° + 360° \cdot n$, sau $x = 45° + 90° \cdot m$; $\pm 30° + 180° \cdot m$.

71. $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n$. 72. $72°52' + 360°n$ şi $17°8' + 360°n$.

73. $119°34' + 360°n$ şi $-13°18' + 360°n$. 74. $90° + 360°n$ şi $30° + 360°n$.

§ 11.

1. a) $\sqrt{1{,}5}$; b) $\sin 18°$; c) 0; d) $-\sin 18°$.

2. a) $2 \sin 12°30' \cdot \cos 7°30'$; b) $-2 \sin 1° \cdot \cos 4°$; c) $2 \cos 10°7'30'' \cdot \cos 6°52'30''$; d) $2 \sin 15° \cdot \sin 10°$.

3. a) $\cos \alpha$; b) $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$. 4. a) $\frac{\operatorname{tg} 20°}{\operatorname{tg} 5°}$; b) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta-\alpha}{2}$.

5. a) $2 \sin 35° \cdot \cos 15°$; b) $\sqrt{2} \cdot \sin 25°$; c) $2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45°\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + 45°\right)$.

6. $\sqrt{2} \cdot \cos(\alpha - 45°)$; $\sqrt{2} \sin(\alpha - 45°)$, sau $\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha \pm 45°)$.

7. a) $\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$; b) $\frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$; c) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$; d) $\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}$.

8. a) $2 \operatorname{cosec} 2\alpha$; b) $-2 \operatorname{ctg} 2\alpha$.

9. a) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$; b) $\sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)$.

10. a) $\frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta}$; b) $\frac{\sin(\beta+\alpha) \cdot \sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta}$; c) $-\frac{\cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta}$; d) $-4 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{cosec} 2\alpha$.

11. a) $2 \cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$; b) $-2 \sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$; c) $\cos 2\alpha$; d) $-\cos 2\alpha$.

12. $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$. 13. $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right)$. 14. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

15. a) $\frac{\sin(45° \pm \alpha)}{\cos 45° \cdot \cos \alpha}$; b) $\frac{\sin(\alpha \pm 45°)}{\sin 45° \cdot \sin \alpha}$.

Indrumare. $1 = \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45°$.

16. $\frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$. 17. a) $2 \sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$; b) $2 \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

18. $2 \sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$.

19. a) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$; b) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$.

20. a) $\sqrt{8} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right)$; b) $\sqrt{8} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right)$.

Indrumare. Mai întîi înlocuim $1 + \cos \alpha$ şi $1 - \cos \alpha$.

21. $-4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha$. 22. a) $-\frac{\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$; b) $-\frac{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

23. a) $\frac{\sqrt{8} \cdot \sin(45° + \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{\sqrt{8} \cdot \sin(45° - \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

24. a) $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$; b) $\frac{\sin(\alpha - 45°)}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

25. a) $4 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$; b) $4 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$.

Indrumare. Exprimăm $\sin(\alpha + \beta)$ prin $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

26. $4 \cos \alpha \cdot \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$.

39. Mai întîi, eliminăm (în membrul stîng) unghiul γ, transformăm expresia obţinută şi introducem din nou γ.

40. Se aplică metoda folosită pentru problema 39.

41. In egalitatea $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg} \gamma$ deschidem parantezele şi facem ca să dispară numitorul.

42. Aplicînd metoda folosită pentru problema 39, mai întîi înlocuim membrul stîng al egalităţii astfel: $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} - \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$; după unele transformări, obţinem expresia: $\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta\,(\sin\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta) + 1}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta)}$ ş. a.

43. In egalitatea $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 1 : \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ deschidem parantezele şi facem ca să dispară numitorii.

44. Se aplică metoda folosită pentru problema 43.

45. In egalitatea $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{ctg} \gamma$ deschidem parantezele şi facem să dispară numitorul.

46. Se aplică metoda folosită pentru problema 39. Mai întîi, obţinem $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$, deschidem apoi parantezele şi înlocuim $\sin^2 \alpha$ şi $\sin^2 \beta$ prin $1 - \cos^2 \alpha$ şi $1 - \cos^2 \beta$ ş. a.

47. Se aplică metoda folosită pentru problema premergătoare. Mai întîi, obţinem $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2(\alpha + \beta)$, deschidem apoi parantezele şi înlocuim $\sin^2 \alpha$ şi $\sin^2 \beta$ prin $1 - \cos^2 \alpha$ şi $1 - \cos^2 \beta$ ş. a.

48. Se aplică metoda folosită pentru problema 39. Mai întîi, obținem $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$ ş. a.

49. Se aplică metoda folosită pentru problema premergătoare.

50. $4\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

51. $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right)$.

52. $4\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

53. a) $4\cos\left(22^\circ30'+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(22^\circ30'-\frac{\alpha}{2}\right)$;

b) $\sqrt{8}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+22^\circ30'\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-22^\circ30'\right)$.

54. $3-4\sin^2\alpha = 4(\sin^2 60^\circ - \sin^2\alpha) = 4\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)$.

55. $4\sin(\alpha+30^\circ)\cdot\sin(\alpha-30^\circ)$. 56. $\frac{4\sin(30^\circ+\alpha)\cdot\sin(30^\circ-\alpha)}{\cos^2\alpha}$.

57. $\frac{4\sin(\alpha+30^\circ)\cdot\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin^2\alpha}$.

58. $4\cos\alpha\cdot\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

59. a) $4\sin 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right)$;

b) $4\cos 2\alpha\cdot\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

60. 1) $\frac{\alpha}{\cos\varphi}$, cînd $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$; 2) $p\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}=$

$=\sqrt{q}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, cînd $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$.

61. Scoțînd pe a din paranteze şi presupunînd $\frac{b}{a}=\cos\varphi$, obținem:

1) $\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}$; 2) $2\sqrt{a}\cdot\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$; 3) $2\operatorname{cosec}\varphi$.

62. $x=\sqrt{(a+b)^2-2ab(1+\cos\gamma)}=\ldots=(a+b)\cdot\cos\varphi$, avînd

$\sin\varphi=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

63. $x=90^\circ\cdot n$; $90^\circ+180^\circ\cdot n$. 64. $x=36^\circ+72^\circ\cdot n$; $60^\circ+120^\circ\cdot n$.

65. $x=\frac{\pi}{2}\cdot n$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\cdot n$. 66. $x=120^\circ\cdot n$; $360^\circ n$.

67. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\cdot n$.

68. $\sqrt{2}\cdot\sin(x+45^\circ)=1$; $x=360^\circ\cdot n$; $90^\circ+360^\circ\cdot n$.

Exercițiu. Să se rezolve această ecvație prin ridicarea ambilor membri la pătrat şi să se găsească rădăcinile străine între rădăcinile obținute ($x=90^\circ\cdot n$).

69. $x=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. 70. $x=9^\circ+180^\circ\cdot n$; $81^\circ+180^\circ\cdot n$.

71. $x=33^\circ45'+90^\circ\cdot n$.

72. $x=7^\circ30'+90^\circ\cdot n$; $37^\circ30'+90^\circ\cdot n$, sau $x=\frac{\pi}{4}\cdot n+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{24}$.

73. $x_1=x_2=22^\circ30'+90^\circ\cdot n$. 74. $x=45^\circ+90^\circ\cdot n$; $\pm 60^\circ+360^\circ\cdot n$.

75. $x=\frac{\pi}{2}\cdot n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

§ 12.

1. c) 9,55800 — 10; d) 9,86558 — 10; e) 9,90237 — 10; f) 8,38433 — 10.
2. c) 9,85029 — 10; d) 9,66015 — 10; e) 9,93747 — 10; f) 7,83786 — 10.
3. b) 9,46110—10; c) 0,45605; d) 9,39691—10; e) 8,18143—10; f) 1,83961.
4. b) 0,42850; c) 9,35098—10; d) 9,99985—10; e) 8,54465—10; f) 2,34150.
5. c) 28°12′55″; d) 59°13′43″; e) 48°35″; f) 25′16″.
6. c) 27°2′50″; d) 45°1′18″; e) 50°28″; f) 89°20′40″.
7. c) 16°6′51″; d) 50°3′34″; e) 45°36″; f) 7′42″.
8. c) 22°55′18″; d) 77°41′38″; e) 45°12″; f) 89°25′37″.
9. a) 0,34202; b) 0,67420; c) 3,7347; d) 229,18; e) 1,3054; f) 1,2514.
10. a) —0,76603; b) 0,93970; c) —2,7726; d) —0,18093; e) —5,7588; f) 1,567.
11. a) 34°51′; b) 67°5′12″; c) 75°57′50″; d) 5°42′38″; e) 48°11′21″; f) 22°9′53″; g) 9°50′48″; h) 20°18′52″.
12. 27°2′10″; 152°57′50″.
13. 223°; 317°.
14. 40°20′49″; 319°39′11″.
15. 124°40′; 235°20′.
16. 26°30′; 206°30′.
17. 111°57′38″; 291°57′38″.
18. 11°18′35″; 191°18′35″.
19. 126°10′; 306°10′.
20. 86°10′39″; 273°49′21″.
21. 113°34′41″; 246°25′19″.
22. 5°44′21″; 174°15′39″.
23. 231°3′30″; 308°56′30″.
24. 74°25′15″.
25. 35°38′29″; 26. 56°1′.

27. $-23°14'50''$. 28. $164°16'40''$. 29. $-15°24'37''$.
30. $28°21'32''$. 31. $-54°6'$. 32. 103,69.
33. $-0,47985$. 34. 0,0010936. 35. $x = 4,7106$.
36. $x = 0,23076$. 37. $x = 342,42$. 38. $x = -1,2062$.
39. $x = 0,61701$. 40. $x = 32,396$.

41. $\frac{b}{a}\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\varphi;\ x = a \cdot \sin\alpha \cdot \sec\varphi = 0,009327$.

	a	b	c	A	B	S
42.	8,49	3,917	(9,35)	(65°14')	24°46'	16,628
43.	250,02	575	(627)	(23°30')	66°30'	71880
44.	0,73233	0,34680	(0,79792)	(66°36'24")	23°23'36''	0,11600
45.	2,7912	2,3418	(3,6435)	(50°12')	39°59'48''	3,2683
46.	(6,37)	79,46	79,715	(4°35')	85°25'	253,08
47.	(18,003)	16,788	24,616	47°	(43°)	151,12
48.	0,12592	(0,1738)	0,21462	(35°55'24'')	54°4'36''	0,010942
49.	0,6158	(0,29544)	0,6830	64°22'12''	25°37'48''	0,090966
50.	(16)	63	(65)	14°15'	75°45'	504
51.	112	(15)	(113)	82°22'19''	7°37'41''	840
52.	(528)	455	(697)	49°14'49''	40°45'11''	120 120
53.	1499,2	(823)	(1710,2)	61°14'5''	28°45'55''	616 910
54.	(261)	(380)	461	34°29'	55°31'	49 590
55.	(156)	(133)	205	49°33'	40°27'	10 374
56.	(0,097836)	(0,10003)	0,13992	44°21'53''	45°38'7''	0,0048933
57.	(12,007)	(6,9194)	13,858	60°2'44''	29°57'16''	41,54

58. $B = 46°47'12''$; $b = 633,6$; $S = \frac{a^2}{2} \cdot \sin 2A = 232\,010$.

59. $A = 23°30'$; $b = 1150$; $S = \frac{a^2}{2} \cdot \sin B = 143\,760$.

60. $B = 60°29'20''$; $a = 15,543$; $S = \frac{b^2}{4} \cdot \mathrm{tg}\,A = 105,13$.

61. $A = 64°24'30''$; $a = 6,4$; $S = \frac{b^2}{4} \cdot \mathrm{ctg}\frac{B}{2} = 15,957$.

62. $A = 37°9'36''$; $B = 105°40'48''$; $S = 36,917$.

63. $A = 57°19'45''$; $B = 65°20'30''$; $a = 857$; $S = \frac{b}{2} \cdot h = 333\,730$.

64. $B = 48°40'$; $b = h_1 : \sin A = 21,95$; $a = h_1 : \sin 2A = 26,636$;

$$S = \frac{1}{2}\, ah_1 = \frac{1}{2}\, h_1^2 : \sin 2A = 266,36.$$

65. $\mathrm{tg}\,A = S : \left(\frac{b}{2}\right)^2$; $A = 24°36'$; $B = 130°48'$; $a = \frac{b}{2} : \cos A = 71,883$.

66. $A = 52°29'53''$; $a = \sqrt{2S : \sin B} = 306,9$; $b = 365,12$.

67. $B = 34°26'44''$; $a = p : 2\cos^2\frac{A}{2} = 15,682$; $b = 9,2864$;

$$S = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \mathrm{tg}\,A = 69,55.$$

68. $A = 73°23'54''$; $B = 33°12'12''$; $a = 30,219$; $b = 17,267$.

69. $B_1 = 34°51'$; $B_2 = 145°9'$; $A_1 = 72°34'30''$; $A_2 = 17°25'30''$;

$b_1 = 8,385$; $b_2 = 26,715$.

Indrumare. Pentru unghiul B avem $\sin B = \ldots$ şi $0 < B < 180°$, iar în aceste limite sinusul dă *două* unghiuri. Rezolvarea dublă să se explice şi în mod geometric.

§ 13.

	a	b	c	A	B	C	S
1.	(370)	541	421	43°1'24"	86°3'	(50°55'36")	77 700
2.	(450)	85	445	(87°55')	(10°52'51")	81°12'9"	18 900
3.	(951)	1196	353	39°35'52"	(126°43')	(13°41'8")	134 550
4.	97,515	83	36	(102°48')	56°6'	(21°6')	1456,9
5.	3,688	(13,024)	10,200	(11°48'45")	(133°42'15'')	34°29'	13,597
6.	13,311	5,337	(15,948)	(51°38'31")	(18°19'29'')	110°2'	33,372
7.	(510)	(317)	533	68°23'8"	35°18'	(76°18'52")	78 540
8.	(225)	(800)	634,14	12°15'6"	131°54''	(36°44')	53 829
9	(2,296)	1,183	(1,687)	104°53'51"	(29°51'46")	45°14'23"	0,96432
10	62,154	(28)	(42)	(124°)	21°55'48''	34°4'12"	487,48
11.	(30,986)	74,55	(69,014)	24°32'22"	(87°47'16'')	67°40'22"	1068,4
12.	43,922	(40,326)	(32,114)	(73°40')	61°46'24"	44°33'36"	621,4
13.	(87)	(65)	76	(75°45')	46°23'50"	57°51'10"	2394
14.	(34)	(93)	$\begin{cases} 115,28 \\ 65 \end{cases}$	(14°15')	$\begin{cases} 42°19'21'' \\ 137°40'39'' \end{cases}$	$\begin{cases} 123°25'39'' \\ 28°4'21'' \end{cases}$	$\begin{cases} 1319,5 \\ 744 \end{cases}$
15.	(24)	(83)	—	(26°45')	—	—	—

	a	b	c	A	B	C	S
16.	615,67 / 55,41	(360)	(309)	133°47′41″ / 3°43′29″	24°57′54″ / 155°2′6″	(21°14′25″)	40 147 / 3613,3
17.	(13,897)	7,109	(8,425)	(126°42′36″)	24°12′40″	29°4′44″	24,008
18.	(0,4366)	(1,2987)	1,7245	3°41′46″	(11°3′20″)	165°14′54″	0,072188
19.	(13,807)	20,714 / 6,0076	(8,136)	25°20′32″ / 154°39′28″	140°2′56″ / 10°44′	(14°36′32″)	36,067 / 10,460
20.	240,48	(263,09)	(215,4)	59°21′	(70°14′42″)	50°24′18″	24 376
21.	(19,058)	(28,193)	36,298 / 11,892	(31°16′47″)	50°11′6″ / 129°48′54″	98°32′7″ / 18°54′19″	265,68 / 87,044
22.	(457,08)	(169,93)	—	—	(21°49′45″)	—	—
23.	(2579,8)	2573,4	(10)	(130°21′35″)	49°28′16″	10′9″	9804,4
24.	(19)	(34)	(49)	16°25′36″	30°24′	133°10′24″	235,56
25.	(89)	(321)	(395)	7°57′46″	29°58′32″	142°3′42″	8782,6
26.	(44)	(483)	(485)	5°12′18″	84°47′40″	90°	10 626
27.	(0,099)	(0,101)	(0,158)	37°22′20″	38°15′42″	104°22′	0,0048432
28.	(172,5)	(1134,7)	(1205,4)	7°42′56″	62°20″	110°16′44″	91 802
29.	(421,63)	(409,87)	(335,94)	68°1′6″	64°20′55″	47°37′59″	63 841
30.	(1,2345)	(2,3456)	(3,4567)	10°50′30″	20°56′24″	148°13′6″	0,76257

31. $C = 18°26'16''$; $a = 2R \cdot \sin A = 14{,}557$; $b = 2R \cdot \sin B = 11{,}828$; $c = 2R \cdot \sin C = 5{,}012$; $S = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = 27{,}228$.

32. $C = 119°30'57''$; $a = \sqrt{\dfrac{2S \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C}} = 20{,}865$; $b = 55{,}293$; $c = 68{,}04$.

33. $A = 59°41'$; $c = \dfrac{h_a}{\sin B} = 5{,}9344$; $b = \dfrac{h_a}{\sin C} = 59{,}92$;

$$a = \frac{h_a \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C} = 57{,}154;\quad S = \frac{h_a^2}{2} \cdot \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} = 153{,}48.$$

34. $A = 77°4'$; $c = \dfrac{l_a}{\sin B} \cdot \cos\dfrac{B-C}{2} = 0{,}52271$;

$$b = \frac{l_a}{\sin C} \cdot \cos\frac{B-C}{2} = 6{,}7127;\quad a = \frac{l_a \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C} \cdot \cos\frac{B-C}{2} = 6{,}6154;$$

$$S = \frac{l_a^2}{2} \cdot \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} \cdot \cos^2\frac{B-C}{2} = 1{,}7099.$$

35. $a = \dfrac{m}{2} \cdot \sin A \cdot \sec\dfrac{C}{2} \cdot \sec\dfrac{A-B}{2}$; $b = \dfrac{m}{2} \cdot \sin B \cdot \sec\dfrac{C}{2} \cdot \sec\dfrac{A-B}{2}$;

$c = m \cdot \sin\dfrac{C}{2} \cdot \sec\dfrac{A-B}{2}$; $S = \dfrac{m^2}{4} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} \cdot \sec^2\dfrac{A-B}{2}$;

$C = 69°20'$; $a = 289{,}9$; $b = 198{,}9$; $c = 287{,}93$; $S = 26976$.

Indrumare. Avem $m = 2R\,(\sin A + \sin B) = \ldots$, de unde determinăm $2R$, apoi cu ajutorul $2R$ compunem expresiile pentru laturi.

36. $C = 54°$; $a = \dfrac{n}{2} \cdot \sin A \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{A-B}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{C}{2} = 34{,}07$;

$$b = \frac{n}{2} \cdot \sin B \cdot \operatorname{cosec}\frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{cosec}\frac{C}{2} = 11{,}07;$$

$$c = n \cdot \cos\frac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec}\frac{A-B}{2} = 28{,}981;$$

$$S = \frac{n^2}{4} \cdot \sin A \sin B \cdot \operatorname{ctg}\frac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec}^2\frac{A-B}{2} = 152{,}56.$$

37. $C = 19°10'$; $c = m : 2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} = 0{,}75577$; $b = 1{,}9583$; $a = 2{,}2471$; $S = 0{,}72235$. *Indrumare.* $m = c\,(\sin A + \sin B)$.

38. $A = 53°7'46''$; $a = n : 2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C-B}{2} = 232$; $b = 210$; $c = 286$; $S = 24\,024$.

39. $C = 102°52'$; $a = p \cdot \sin\dfrac{A}{2}\sec\dfrac{B}{2}\sec\dfrac{C}{2} = 80{,}22$;

$b = p \cdot \sin\dfrac{B}{2}\sec\dfrac{A}{2}\sec\dfrac{C}{2} = 152{,}81$; $c = p \cdot \sin\dfrac{C}{2}\sec\dfrac{A}{2}\sec\dfrac{B}{2} = 187{,}74$;

$$S = p^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 5975{,}1.$$

Indrumare. Metoda 1. Avem $2p = 2R\,(\sin A + \sin B + \sin C) =$

$$= 8R \cdot \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};\ \text{de aici}\ 2R = \frac{\frac{p}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

de care ne şi folosim la calculare şi compunem cu ajutorul ei expresiile pentru laturi, apoi pentru suprafaţă.

Metoda 2. Pe prelungirile laturii AC măsurăm $CE = CB$ şi $AD = AB$ şi unim punctele D şi E cu B; în triunghiul DBE, latura $DE = 2p$, unghiul $D = \dfrac{A}{2}$, unghiul $E = \dfrac{C}{2}$. Din triunghiul isoscel BCE găsim: $a = \dfrac{BE}{2} : \cos\dfrac{C}{2}$; pentru determinarea laturii BE, avem din triunghiul DBE:

$$BE : 2p = \sin\frac{A}{2} : \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2}.$$

Astfel se determină a; expresiile pentru b şi c se compun *în mod analog*.

40. $C = 118°4'22''$; $c = r \cdot \cos\dfrac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{B}{2}$;

$b = r \cdot \cos\dfrac{B}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{C}{2}$; $a = r \cdot \cos\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{B}{2} \cdot \operatorname{cosec}\dfrac{C}{2}$;

$S = r^2 \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$.

Este mai îndămîn a ne folosi pentru calculare de segmentele (x, y, z) laturilor de la vîrfuri (A, B, C) pînă la punctele de tangență; atunci obținem: $x=25$, $y=14$ și $z=3$, apoi găsim: $a = z + y = 17$, $b = z + x = 28$, $c = x + y = 39$ și $S = (x + y + z)\, r = 42 \cdot 5 = 210$.

41. $A = 33°52'22''$; $C = 98°7'38''$; $a = 0{,}69272$; $b = 0{,}92364$; $S = 0{,}3167$.

42. $C = 47°26'25''$; $B = 37°3'35''$; $b = 38{,}452$; $c = 47$; $S = 899{,}48$.

43. $A_1 = 75°45'$; $C_1 = 87°11'$; $a_1 = 220{,}16$; $b_1 = 66{,}663$; $S_1 = 7329{,}7$;
$A_2 = 104°15'$; $C_2 = 58°41'$; $a_2 = 257{,}4$; $b_2 = 77{,}94$; $S_2 = 8569{,}4$.

44. $B = 35°53'7''$; $C = 97°46'18''$; $b = 12{,}954$; $c = 21{,}896$; $S = 102{,}6$.

45. $B = 10°1'34''$; $C = 101°15'26''$; $a = 155{,}21$; $c = 163{,}37$; $S = 2207{,}3$.

46. $A = 12°7'36''$; $C = 43°14'24''$; $b = 166{,}47$; $c = 138{,}6$.

47. $A = 100°24'56''$; $B = 50°12'28''$; $C = 29°22'36''$; $c = 15{,}961$; $S = 196{,}22$.

48. $A = 38°49'10''$; $B = 19°17'52''$; $C = 121°52'58''$; $a = 23{,}9$; $b = 12{,}6$; $c = 32{,}374$; $S = 127{,}85$.

49. $A = 126°43'1''$; $B = 39°35'51''$; $a = 1196$; $b = 951$; $S = 134550$.

Indrumare. $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$; de aici $\cos\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{m}{c}\cdot\sin\dfrac{C}{2}$, cu ajutorul cărei determinăm $\dfrac{A-B}{2}$; iar cunoscînd $\dfrac{A+B}{2}$ și $\dfrac{A-B}{2}$, găsim A și B.

50. $A = 81°30'32''$; $B = 44°49'28''$; $a = 22{,}479$; $b = 16{,}022$; $S = 145{,}06$.

51. $B = 41°4'50''$; $C = 36°17'10''$; $a = 8{,}5556$; $b = 5{,}7616$; $S = 14{,}586$.

Indrumare. Metoda 1. Conform cu formula întîia a lui Molveide, avem:

$$\frac{m}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)};\ \text{de aici}\ \frac{m+c}{m-c} = \frac{2\cos\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{2\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2},$$

celace dă putința de a determina unghiul B.

Metoda 2. Inmulțind formulele

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\ \text{și}\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\ \text{obținem:}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{p-c}{p},\ \text{însă}\ \frac{p-c}{p} = \frac{2(p-c)}{2p} = \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{m-c}{m+c}.$$

52. $B = 37°43'46''$; $C = 63°36'14''$; $a = 16{,}58$; $b = 10{,}347$; $S = 76{,}832$.

Indrumare. Metoda 1. Conform cu formula a doua a lui Molveide, avem:

$$\frac{n}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)};\ \text{de aici}\ \frac{c+n}{c-n} = \frac{2\sin\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{2\cos\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2},$$

celace dă putința de a determina unghiul B.

Metoda 2. Impărțind $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ prin $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, obținem $\operatorname{tg}\frac{A}{2} : \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{p-b}{p-a}$; însă

$$\frac{p-b}{p-a} = \frac{2(p-b)}{2(p-a)} = \frac{c+a-b}{c+b-a} = \frac{c+n}{c-n}.$$

53. $A = 115°39'32''$; $B = 25°39'32''$; $C = 38°40'56''$; $a = 9{,}996$; $b = 4{,}802$; $c = 6{,}931$.

54. $A = 26°33'54''$; $B = 30°4'31''$; $C = 123°21'35''$; $a = h_c : \sin B = 71{,}837$; $c = h_b : \sin A - 134{,}16$; $b = c\cdot 0{,}6 = 80{,}496$; $S = 0{,}5\cdot c\cdot h_c = 2414{,}9$.

Indrumare. $\operatorname{tg} A = 0{,}5$; $b : c = h_c : h_b = 3 : 5$.

55 $A = 27°16°17''$; $B_1 = 63°42'$; $C_1 = 89°1'43''$; $c_1 = 50{,}189$; $S_1 = 517{,}43$; $B_2 = 116°18'$; $C_2 = 36°25'43''$; $c_2 = 29{,}807$; $S_2 = 307{,}3$.

56. $B = 11°25'16''$; $A_1 = 55°1'27''$; $C_1 = 113°33'17''$; $c_1 = 134{,}25$; $S_1 = 0{,}5\cdot c_1\cdot h_c = 1595$; $A_2 = 124°58'33''$; $C_2 = 43°36'11''$; $c_2 = 101$; $S_2 = 1200$.

57. $C_1 = 30°$; $B_1 = 103°3'52''$; $A_1 = 46°56'8''$; $c_1 = 4{,}1063$; $C_2 = 150°$; $B_2 = 17°11'32''$; $A_2 = 12°48'28''$; $c_2 = 13{,}533$. (Resolvarea dublă să se explice după figura).

58. $A = 30°24'$; $B = 99°45'20''$; $C = 49°50'40''$; $a = 50{,}32$; $S = 1884{,}5$.

59. $A = 83°24'48''$; $B = 36°35'12''$; $C = 60°$; $c = 17{,}436$; $S = 103{,}92$.

Indrumare. Mai întîi, prelungim mediana CD la distanța $DE = CD$ și, unind punctele B și E, determinăm unghiul CBE din triunghiul CBE.

60. $A = 127°10'8''$; $B = 32°5'20''$; $C = 20°44'32''$; $a = h_b : \sin C = 33{,}882$; $b = h_a : \sin C = 22{,}588$; $c = h_a : \sin B = 15{,}059$; $S = 135{,}53$.

Indrumare. Avem $a : b : c = \dfrac{2S}{8} : \dfrac{2S}{12} : \dfrac{2S}{18} = 9 : 6 : 4$, celace dă putința de a determina unghiurile.

61. $A = 135°10'52''$; $B = 27°7'27''$; $C = 17°41'41''$; $a = 64{,}933$; $S = 414{,}47$.

Indrumare. Avem (comparînd suprafețele triunghiurilor):

$$\frac{bc}{2}\cdot\sin A = \frac{bl_a}{2}\cdot\sin\frac{A}{2} + \frac{cl_a}{2}\cdot\sin\frac{A}{2};\ \text{de aici găsim}\ \cos\frac{A}{2} = \frac{(b+c)l_a}{2bc}.$$

§ 14.

1. a) $x = 30° + 360°\cdot n$; $150° + 360°\cdot n$, sau $x = \pi n + (-1)^n\frac{\pi}{6}$;

b) $x = 30°$, $150°$, sau $x = \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$.

2. a) $x = \pm 51°49'37'' + 360°\cdot n$; b) $x = 51°49'37''$; $308°10'23''$.

3. a) $x = \pm 72^\circ + 360^\circ \cdot n$; $\pm 144^\circ + 360^\circ \cdot n$, sau $x = \pm \frac{2\pi}{5} + 2\pi n$; $\pm \frac{4\pi}{5} + 2\pi n$; b) $x = 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$, sau $x = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$.

4. a) $x = -45^\circ + 180^\circ \cdot n$, sau $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; b) $x = 135^\circ, 315^\circ$, sau $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

5. a) $x = \pm 60^\circ + 180^\circ \cdot n$, sau $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$; b) $x = 60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$, sau $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

6. a) $x = 180^\circ \cdot n$; $\pm 60^\circ + 360^\circ \cdot n$, sau $x = \pi n$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$;
b) $x = 0^\circ, 60^\circ, 180^\circ\ 300^\circ, 360^\circ$, sau $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$.

7. a) $x = 90^\circ + 180^\circ \cdot n$; $19^\circ 28' 17'' + 360^\circ \cdot n$; $160^\circ 31' 43'' + 360^\circ \cdot n$; b) $x = 19^\circ 28' 17'', 90^\circ, 160^\circ 31' 43'', 270^\circ$.

8. a) $x = \pm 45^\circ + 360^\circ \cdot n$; $\pm 135^\circ + 360^\circ \cdot n = 45^\circ + 90^\circ \cdot m$, sau $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot m$; b) $x = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$, sau $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

9. a) $x = 10^\circ + 120^\circ \cdot n$; $50^\circ + 120^\circ \cdot n$, sau $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot n$; $\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot n$; b) $x = 10^\circ, 50^\circ, 130^\circ, 170^\circ, 250^\circ, 290^\circ$, sau $x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}$.

10. a) $x = 112^\circ 30' + 450^\circ \cdot n$, sau $x = \frac{5\pi}{8} + \frac{5\pi}{2} \cdot n$; b) $x = 112^\circ 30'$, sau $x = \frac{5\pi}{8}$.

11. a) $x = 90^\circ (6n \pm 1)$, sau $x = \frac{\pi}{2}(6n \pm 1)$; b) 90°, sau $\frac{\pi}{2}$.

12. a) $x = 4\pi (3n \pm 1$; b) nu.

13. 1) $\alpha - \beta = 180^\circ \cdot 2n$; $\alpha + \beta = 180^\circ \cdot (2n + 1)$; 2) $\alpha \pm \beta = 360^\circ \cdot n$; 3) $\alpha - \beta = 180^\circ \cdot n$; 4) $\alpha - \beta = 180^\circ \cdot n$; 5) $\alpha + \beta = 180^\circ \cdot 2n$; $\alpha - \beta = 180^\circ \cdot (2n + 1)$; 6) $\alpha \pm \beta = 180^\circ \cdot (2n + 1)$; 7) $\alpha + \beta = 180^\circ \cdot n$; 8) $\alpha + \beta = 180^\circ \cdot n$; 9) $\alpha \pm \beta = 90^\circ + 360^\circ \cdot n$; 10) $\alpha \pm \beta = 270^\circ + 360^\circ \cdot n$; 11) $\alpha + \beta = 90^\circ + 180^\circ \cdot n$; 12) $\alpha - \beta = 90^\circ + 180^\circ \cdot n$. *Indrumare.* Reducînd egalitatea la zero, înlocuim membrul întîi prin produs sau fracție

14. $9^\circ \cdot (2k + 1)$. 15. $180^\circ k$. 16. $60^\circ(2k + 1)$.

17. $\sin 2x = \frac{a}{b - a}$. Ecvația are rădăcini dacă $a \leqq \frac{b}{2}$.

18. $\frac{\kappa}{p + q} \cdot 180^\circ$. 19. $45^\circ (4\kappa - 1)$ și $22^\circ 30' (4\kappa + 3)$.

20. $36^\circ \kappa$ și $45^\circ \kappa$. 21. $x = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{a}\right) + 180^\circ n$.

22. $(2\kappa + 1) \cdot 90^\circ$ și $180^\circ \kappa + 45^\circ$. 23. $(-1)^n \arcsin \frac{-2 \pm \sqrt{54}}{10} + 180^\circ n$.

24. $\pm 2 \arccos \frac{\sqrt{17} - 1}{4} + 720^\circ n$. 25. $180^\circ \kappa + (-1)^k 30^\circ - \frac{m}{2}$.

26. $90^\circ \kappa$ și $\pm 120^\circ + 360^\circ \kappa$. 27. $180^\circ \kappa$. 28. $\operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg} x_2 = \frac{a}{b}$.

30. $x_1 = 126^\circ 52' 12'' + 360^\circ \cdot n$; $x_2 = -151^\circ 55' 40'' + 360^\circ \cdot n$.

31. $x = 360^\circ \cdot n$; $-126^\circ 52' 12'' + 360^\circ \cdot n$. 32. $x = 31^\circ 58' 41'' \pm 16^\circ 20' + 360^\circ n$.

33. $x = 15^\circ + 360^\circ \cdot n$; $105^\circ + 360^\circ \cdot n$. *Indrumare.* Impărțind ambii membri ai acestei ecvații prin 2, obținem: $\cos(x - 60^\circ) = \cos 45^\circ$.

34. $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$. 35. $x = 180^\circ \cdot n$; $45^\circ + 180^\circ \cdot n$.

36. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

37. $x = \pm 60^\circ + 360^\circ \cdot n$. *Indrumare.* Reducînd ecvația la zero și unind membrul întîi într'o fracție, o simplificăm cu $1 + \sin x$.

38. $x = 10^\circ 9' 40'' + 180^\circ \cdot n$; $79^\circ 50' 20'' + 180^\circ \cdot n$.

39. $\frac{\pi}{4} + x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$. 40. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{\pi}{6} + \pi n$; $\frac{\pi}{3} + \pi n$.

41. $x = \pm 60^\circ + 360^\circ \cdot n$; $\pm 120^\circ + 360^\circ \cdot n$, sau $\pm 60^\circ + 180^\circ \cdot m$.

42. $x = 75^\circ + 180^\circ \cdot n$; $15^\circ + 180^\circ \cdot n$. 43. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c$.

44. $x = 180^\circ \cdot n$; $\pm 60^\circ + 180^\circ \cdot n$, sau $60^\circ \cdot m$.

45. $x = -15^\circ + 180^\circ \cdot n$; $-75^\circ + 180^\circ \cdot n$.

46. $x = 60^\circ \cdot n$; $15^\circ + 30^\circ \cdot n$.

47. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. 48. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$.

49. $x_1 = x_2 = 90^\circ + 180^\circ \cdot n$; $x_3 = 45^\circ + 90^\circ \cdot n$.

50. $x = \pm 18^\circ + 360^\circ \cdot n$; $\pm 162^\circ + 360^\circ \cdot n$; $\pm 54^\circ + 360^\circ \cdot n$; $\pm 126^\circ + 360^\circ \cdot n$, sau $180^\circ \cdot m \pm 18^\circ$; $180^\circ \cdot m \pm 54^\circ$.

51. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} \cdot n$. *Indrumare.* $\cos 4x + \cos 2x$ trebue înlocuit prin produs.

52. $x = 120° \cdot n;\ -90° + 360° \cdot n;\ 45° + 180° \cdot n$. *Indrumare*. $\cos x - \cos 2x$ trebue înlocuit prin produs, iar $\sin 3x$ descompus ca $\sin 2\left(\frac{3x}{2}\right)$.

53. $\cos\frac{3x}{2} = 0;\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{b}{a}$.

54. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\quad \pi n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}$. *Indrumare*. Inlocuind $\sin x + \sin 3x$ şi $1 + \cos 2x$ prin produse şi mai făcînd unele transformări, venim la următoarea ecvaţie: $\cos x\,(1 + 2\cos x)\,(1 - 2\sin x) = 0$.

55. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$. *Indrumare*. Această ecvaţie se reduce la următoarea: $\frac{\cos 2x}{\sin 3x \cdot \cos x} = 0$.

56. $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4};\ x = \pm 77°20'12'' + 720° \cdot n$. 57. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$.

58. $x = \frac{\pi}{2} \cdot n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}$. *Indrumare*. Inlocuim primul membru prin fracţie $\left(\frac{4}{\sin^2 x}\right)$.

59. $\cos x_1 = \cos x_2 = \frac{1}{3};\ x_1 = x_2 = \pm 70°31'43'' + 360° \cdot n$.

60. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n;\ x_2 = x_3 = \pi n$. *Indrumare*. $1 + \sin 2\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)^2$.

61. $x_1 = x_2 = 90° \cdot n;\quad x_3 = \pm 30° + 180° \cdot n$, sau $x = 90° \cdot n;\ 180° \cdot n;\ 30° + 60° \cdot n$. *Indrumare*. Înlocuim $\sin^2 3x - \sin^2 x$ prin produs.

62. $x = 60° \cdot n;\ \pm 35°15'53'' + 180° \cdot n$.

Indrumare. Punem ecvaţia dată sub forma $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} 3x$ şi descompunem $\operatorname{tg} 3x$ ca $\operatorname{tg}(x + 2x)$, atunci ecvaţia nouă se descompune în următoarele două ecvaţii: 1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$ şi 2) $1 = -1 : (1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x)$. Din ecvaţia (1) obţinem $\sin 3x = 0$, iar din ecvaţia (2): $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

63. $x = \frac{\pi}{8} \cdot n;\quad \frac{\pi}{4} \cdot n$. *Indrumare*. Inmulţim ambii membri cu 2 şi aplicăm egalitatea $2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.

64. $x = 45° + 180° \cdot n,\ 90° + 180° \cdot n$. 65. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

66. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$. 67. $x = \pm 60° + 180° \cdot n;\ 90° + 180° \cdot n$.

68. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$.

69. $x_1 = 90° + 180° \cdot n;\ x_2 = x_3 = 90° + 360° \cdot n$. 70. $x_1 = \pi n;\ x_2 = x_3 = 2\pi n$.

71. $\operatorname{tg} x = \pm(\sqrt{2} + 1);\ \pm(\sqrt{2} - 1);\quad x = \pm\frac{3}{8}\pi + \pi n;\quad \pm\frac{\pi}{8} + \pi n$, sau $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} m$.

72. $x = 60° \cdot n;\ 180° \cdot n$. *Indrumare*. Inlocuim $\operatorname{tg} 2x$ prin $\frac{2\sin x\ \cos x}{\cos 2x}$.

73. $x = \pi n$. 74. 1) $\sin x = 0{,}8;\ \sin y = -0{,}6$; 2) $\sin x = -0{,}6;\ \sin y = 0{,}8$. *Indrumare*. Ecvaţiile: $\sin y = 0{,}2 - \sin x$ şi $\cos y = -0{,}2 - \cos x$ se ridică la pătrat şi se adună.

75 1) $\cos x = \frac{1}{2};\ \cos y = \frac{1}{3}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2};\ \cos y = -\frac{1}{3}$;

3) $\cos x = \frac{1}{3};\quad \cos y = \frac{1}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{3};\ \cos y = -\frac{1}{2}$.

Indrumare. Luînd suma şi diferenţa ecvaţiilor date, exprimăm din ecvaţiile noi $\cos y$ şi $\sin y$ şi adunăm pătratele lor.

76. 1) $\operatorname{tg} x = 5 + \sqrt{34},\ \operatorname{tg} y = 5 - \sqrt{34}$; 2) $\operatorname{tg} x = 5 - \sqrt{34},\ \operatorname{tg} y = 5 + \sqrt{34}$.

77. $x^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. *Indrumare*. Luînd cosinusul $(\alpha + \beta) = \cos\varphi$, deschidem parantezele, exprimăm apoi $\cos\alpha$ şi $\cos\beta$ respectiv prin $\sin\alpha$ şi $\sin\beta$ şi înlocuim $\sin\alpha$ şi $\sin\beta$ prin $\frac{a}{x}$ şi $\frac{b}{x}$.

78. 1) $x = 45° + 180°(m + n),\ y = 15° + 180°(m - n)$; 2) $x = 105° + 180°(m + n),\ y = -45° + 180°(m - n)$; 3) $x = -15° + 180°(m + n)$, $y = -45° + 180°(m - n)$; 4) $x = 45° + 180°(m + n)$, $y = -105° + 180°(m - n)$.

79. 1) $x = 21°21'16'',\ y = 8°38'44''$; 2) $x = 81°21'16''.\ y = 68°38'44''$.

80. 1) $x = 81°21'16'',\ y = 21°21'16''$; 2) $x = 21°21'16'',\ y = 81°21'16''$.

81. x şi y se determină după jumătatea sumei şi jumătatea diferenţei lor: 1) din prima ecvaţie avem $\frac{x + y}{2} = \frac{\alpha}{2}$; 2) cu ajutorul ecvaţiei a doua, înlocuind-o prin $2\sin\frac{x + y}{2} \cdot \cos\frac{x - y}{2} = a$, putem determina $\frac{x - y}{2}$.

82. $x = 15°20',\ y = 61°40'$. 83. x şi y se determină după suma şi diferenţa lor: 1) $x + y$ se dă; 2) $x - y$ găsim cu ajutorul ecvaţiei a doua, dacă înmulţim ambii membri ai ei cu 2 şi înlocuim $2\sin x \cdot \sin y$ prin $\cos(x - y) - \cos(x + y)$. 84. $x = 60°,\ y = 11°40'$,

85. Din ecvaţia întîia avem $\frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}\alpha$, iar din ecvaţia a doua gă-

sim: $\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{m+n}{m-n}$, sau $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-y)} = \frac{m+n}{m-n}$, de unde determinăm $\frac{1}{2}(x-y)$. **86.** $x = 35°46'$, $y = 60°52'$.

87. Putem înlocui ecvaţia a doua astfel: $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = a$, de unde $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{a} \cdot \sin(x+y)$, sau $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{a} \cdot \sin \alpha$. Inmulţim acum ambii membri cu 2 si înlocuim $2 \cos x \cdot \cos y$ prin $\cos(x+y) + \cos(x-y)$; atunci putem determina $x - y$.

88. $x = 44°20'3''$, $y = 13°20'3''$.

89 Inlocuim ecvaţia a doua prin $\frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{a}{1}$ şi găsim de aici $\frac{\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y} = \frac{1+a}{1-a}$, sau $\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{1+a}{1-a}$, şi cu ajutorul acestei ecvaţii determinăm apoi $x - y$. **90.** $x = 45°$, $y = 40°$.

91. Din ecvaţia a doua găsim: $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{m+n}{m-n}$, sau $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{m+n}{m-n}$, cu ajutorul cărei determinăm apoi $x - y$.

92. 1) $x = 22°25'$, $y = 18°39'$; 2) $x = 71°21'$, $y = 67°35'$.

93. $x = 30°$, $y = 60°$.

94. $\operatorname{tg} x = 1$; $\operatorname{tg} y = 2$; $\operatorname{tg} z = 3$; $x = 45°$; $y = 63°26'6''$; $z = 71°33'54''$. *Indrumare.* $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z$.

65. $x = 30°57'50''$; $y = 78°41'25''$; $z = 70°20'45''$. (Vezi problema 94).

§ 15.

1\. 1) $-\frac{\pi}{6}$; 2) $2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{3}{4}\pi$. 2. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 0; 3) $\sqrt{3}$.

3\. 1) -1; 2) 1; 3) 0. 4. 1) x; 2) $\pm\frac{3}{5}$; 3) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

5\. 1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\sqrt{3}$. 6. 1) $-\frac{\pi}{5}$; 2) $x + \pi n$; 3) $\frac{5\pi}{14}$.

7\. 1) 0,6; 2) $\frac{15}{17}$; 3) $\frac{3}{4}$. 8. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$. 9. 1) ∞; 2) ∞.

10\. $\sqrt{3}$. 11. $\frac{77}{85}$. 12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 13. $\frac{41}{49}$. 14. $2m\sqrt{1-m^2}$.

15\. $\frac{47}{52}$. 16. $\frac{2m}{1+m^2}$. 32 $\pm\sqrt{2}$. 33. 0; $\frac{1}{2}$.

34\. $\pm\sqrt{3}$. 35. $\sqrt{2}$. 36. 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. 37. $\frac{\pi}{4} + \pi n$.

38\. $\pm\frac{\pi}{6}$. 39. $\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{2})}{17}}$. 40. $\frac{1}{2}$. 41. 0; $\frac{1}{2}$.

42\. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 43. $\pm\sqrt{\frac{2}{a}}$. 44. $\pm\frac{1}{3}$.

§ 15a.

1\. $b = a \cdot \sec\frac{180°}{n}$. 2. 18,02 *cm* şi 22,47 *cm*.

3\. $2a\cos\frac{180°}{n}$. 4. 1) $2R = a \cdot \operatorname{cosec}\frac{180°}{n}$; 2) $\frac{a}{2} \cdot \operatorname{cosec}\frac{90°}{n}$.

5\. 26,974 *m*; 20,835 *m*. 6. $4r^2 \operatorname{cosec} \alpha = 167$.

7\. $\sqrt{Q \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}} = 24{,}66$. 8. $\beta = 2 \operatorname{arc tg}\frac{b^2}{4Q} = 130°47'2''$.

9\. $\frac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$; 1) 1453,6; 2) 4,828; 3) 1119,6.

10\. $\frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{360°}{n}$; 1) 147; 2) 116,5. 11. $nR^2 \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$. 12. 183,84 cm^2.

13\. $\approx 41a$. 14. $a^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha$. 15. 71 *cm*.

16\. $S_9 : S_{10} = 10 \operatorname{ctg} 20° : 9 \operatorname{ctg} 18° = 0{,}9919$. 17. 21,7495 cm^2.

18\. $\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{r^2}{2}\sin\alpha$; 1) 0,979; 2) 1,638.

19\. $\frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{R^2 \sin\alpha}{2}$, unde $\alpha = 2 \operatorname{arc sin}\frac{a}{2R}$; 0,59 cm^2.

20\. $R^2 \cdot \left[\frac{\pi(180° - \alpha)}{180°} + \sin\alpha\right]$. 21. 3,2152 *cm* şi 7,7848 *cm*.

22\. $S = \frac{4ab}{\sin\alpha}$; $l_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \frac{2}{\sin\alpha}$;

$$l_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} \cdot \frac{2}{\sin\alpha}.$$

23\. $6 - \pi \cdot \frac{90° + \alpha}{72°} = 0{,}46425$, unde α este arcul între punctele de tangenţă pe cercul mai mare.

24\. 30°.

§ 16.

1. $OM = a \cos \alpha = 3{,}3.$ 2. $\text{arc tg}\,\frac{r}{p} = 60°26'.$ 3. $\text{arc tg}\,\frac{2d}{a} = 53°8'.$

4. $35°16'.$ 5. $5{,}2\ m;\ 28°33'.$ 6. $51°3'.$

7. $2{,}6\ m;\ 67°23'.$ 8. $70°32'.$ 9. $\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\beta;\ \varphi = 45°.$

10. $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta};\ 6°15'.$ 11. $x = \text{arc tg}\,\frac{4hS}{abc} = 75°52'.$

12. $\frac{a \sin\beta\, \text{tg}\,\varphi}{\sin(\beta+\gamma)} = 322{,}5\ m.$ 13. $\frac{\alpha^2}{4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 + \text{tg}^2\alpha}.$

14. $\text{arc sin}\,\frac{n \pm m}{a};\ 13°21'$ sau $90°.$ 15. $\varphi = \text{arc tg}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$

Indrumare. Urmele paralelelor oblice şi urma secantei se află într'o singură linie dreaptă.

16. $\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}.$ 17. $\text{arc sin}\,\frac{c \sin\alpha}{d};\ 45°.$

18. $\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ (perpendicularele au aceiaş direcţie);

$\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ (perpendiculare au direcţii felurite).

Indrumare. Proectăm în planul dat segmentul a şi perpendicularele ridicate pe el; alcătuim apoi un triunghi dreptunghi cu ipotenuza b şi cu o catetă paralelă la proecţia a.

19. $82°49'10''$ şi $41°24'35''.$

§ 17.

1. $a\ \text{tg}\,\alpha = 5{,}4405.$ 2. 1) $\text{arc sin}\,\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta};$ 2) $22°37'.$

3. $\sin x = \sin 20° \cdot \cos 25°;\ x = 18°3'28'' \approx 18°.$

4. $22°23'' \approx 22°.$ 5. $\sin\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$ 6. $\frac{180°}{n}.$

7. a) $26{,}7\ m;\ 11{,}7\ m;$ b) $\alpha = 18°33'30'';\ \beta = 46°30'51'';$ c) $17°14';\ 40°;$

d) $18°47';\ 50°32'.$ 8. $39°48'.$ 9. $\frac{a}{2} \sin 2\alpha \cdot \sin\varphi.$

10. $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{tg}\,\alpha;\ \text{tg}\,y = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,\alpha.$ 11. $x = \text{arc sin}\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right).$

12. $73°24'.$ 13. $30°.$ 14. $\varphi = \text{arc sin}\,0{,}6 = 36°52'11''.$

16. 1) $70°31'48'';$ 2) $109°28'16'';$ 3) $138°11'36''.$

Indrumare. Problema se reduce la determinarea unghiului dintre feţele laterale într'o piramidă pentagonală regulată cu muchiile egale.

4) $116°33'44''.$

Indrumare. Problema se reduce la determinarea unghiului dintre feţele laterale într'o piramidă triunghiulară regulată, în care unghiul plan la vîrf este de $108°.$

§ 18.

1. $43{,}3\ cm^2.$ 2. $Q\sqrt{2}.$ 3. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}.$

4. $42{,}2\ cm.$ 5. $1954\ cm^2 \approx 2000\ cm^2.$ 6. $33\ m^2.$

7. $36°52';\ 3\ m.$ 8. In cantităţi egale.

9. $Q \cdot \sin\alpha;$ mai slab; mai luminos. 10. $106\ m^2.$

§ 19.

1. $67°54'50''.$ 3. $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}.$

4. 1) $\frac{3}{4}a\sqrt{a^2 + 2b^2};$ 2) $\text{arc tg}\,\frac{b\sqrt{2}}{a}.$

5. Planul secant este paralel diagonalei mai mari a bazei şi formează cu planul bazei un unghi φ, iar $\cos\varphi = \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$

6. $d^2\sqrt{2} \cdot \sin 2\beta \cdot \sin(45° + \alpha) \approx 393{,}2\ m^2.$ 7. $d^2\,\text{ctg}\,\frac{\alpha}{4} \approx 1962\ m^2.$

8. $5a^2\,\text{ctg}\,36° \cos^2 27° \approx 3092\ m^2.$

9. $4a^2\,\text{cosec}\,\frac{\beta}{2} \cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \approx 34\,700\ cm^2.$

10. $\frac{1}{3}a^2\sqrt{3}\sec\alpha\left(1 + \sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}\right).$

11. $x = \text{arc tg}\left(\frac{1}{2}\,\text{tg}\,\varphi\right) = 16°6'8'';\ y = \text{arc tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{tg}\,\varphi\right) = 26°33'54''.$

12. $x = \text{arc cos}\left(\text{ctg}\,\frac{180°}{n}\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right) = 54°44'7''.$ 13. $\frac{a \sin\alpha}{2\sin(\alpha + 45°)}.$

14. $\frac{1}{4}a^2 \sec\alpha \sqrt{\sin(\alpha + 30°)\sin(\alpha - 30°)}.$

15. $x = \frac{1}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{P\sqrt{2}}{c^2} = 29°1'34''$ sau $60°58'26'';\ y = 2c\cos x = 8{,}7440$ sau $4{,}852.$

16. $\text{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{m\sqrt{2}}{n};\ \varphi = 90° - 2\,\text{arc tg}\,\frac{m\sqrt{2}}{n} = 30°.$

17. $\frac{a^2}{9\sqrt{3}}\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}=1{,}962.$ 18. $a^2\cdot\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$ 20. $48\ cm^2.$

21. 1) $2a^2$; 2) $\frac{a^2}{2}$; $3a^2$. 22. $168\ cm^2$. 23. $14{,}61\ m^2$.

24. $32°51'38''$. 25. $a^2\sec\alpha$. 26. $4h^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

27. $2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2}\sec\varphi$. 28. $2nk^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{180°}{n}=6238{,}5$.

29. $(a+b)\sqrt{ab}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\sec\alpha$. 30 $l^2\sin2\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot\sec\varphi$.

31. $a^2\sqrt{2}\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$.

32. $\frac{na^2}{4\sin\frac{180°}{n}\cos\alpha}\sqrt{1-\sin^2\frac{180°}{n}\cos^2\alpha}$, sau

$$\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\sqrt{1+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\frac{180°}{n}}}.$$

33. $a^2\sec^2\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)$.

34. $a^2\operatorname{ctg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$; $a^2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cosec}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

35. $\frac{2h^2}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45°-\frac{\beta}{2}\right)$

36. $a^2\sin\alpha\operatorname{ctg}\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)$. 37. $\sqrt{c^2-\frac{(a-b)^2}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{180°}{n}}$.

38. $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{m-n}{m+n}\sqrt{2}$; $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{m-n}{m+n}\sqrt{2}\right)$.

39. $\frac{n(a+b)}{2}\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{180°}{n}+h^2}+n\frac{a^2+b^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$.

40. $\frac{n(a^2-b^2)}{4\sin\frac{180°}{n}}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\frac{180°}{n}}+\frac{n(a^2+b^2)}{4}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$.

41. $nk^2\frac{m+1}{m-1}\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$. 42. $2h^2\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}=2927{,}7$.

§ 20.

1. $\operatorname{tg}\varphi=\sin15°$; $\varphi=\operatorname{arc\,tg}(\sin15°)=14°30'39''$. 2. $R\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{-\cos2\alpha}$.
3. $\sqrt{R^2\sin^2\alpha+d^2\cos^2\alpha}$.
Indrumare. Fie O centrul bazei, A punctul de tangenţă, B punctul de în-

tretăere a tangentei cu planul bazei, C capătul de jos al generatoarei, care trece prin A, şi OD perpendiculara din O pe AB. Atunci $\angle ABC=\alpha$, $OA=d$ şi $OC=R$. Unind deasemenea C şi D, obţinem în triunghiul ODC un unghi drept la vîrful C.

4. $\frac{b\sin2\alpha}{2\sqrt{2}\sin(45°+\alpha)}$. 5. $\left(\frac{R}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi}\right)^2\sin\alpha\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}$.

6. $\frac{a}{4}\cdot\frac{\sin2\alpha\cdot\sin2\beta}{\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-2)}$.

Indrumare. Segmentul căutat îl determinăm după părţi.

7. $\frac{l\sin\alpha\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}=l\sin\alpha\sin^2\varphi$, unde φ se determină din egalitatea

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}=\operatorname{ctg}^2\varphi.$$

8. $\frac{R\sin\alpha\cdot\sin60°}{\sin(\alpha+60°)}$. 9. $2\pi a^2\cos\alpha\cos^2\frac{a}{2}$. 10. $70°32'$.

11. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}$; $\alpha=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{4}=76°17'32''$. 12. $\pi Q\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

13. $\sin\alpha\sqrt{S\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}=19{,}4105\ cm$. 14. $22{,}523\ m^2$; $4{,}4425\ m^2$;

15. 1) $b=nh=80\ m$; 2) $r=mh=6\ m$; 3) $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}=2°51'45''$;
4) $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}=33°41'24''$; 5) $\gamma=\operatorname{arc\,cos}\frac{m}{n}=85°41'56''$;
6) $537{,}92\approx540\ m^2$; 7) $646{,}59\approx650\ m^2$.

16. $\sin\frac{x}{2}=\frac{S}{\pi a^2}$; $x=2\operatorname{arc\,sin}\frac{S}{\pi a^2}=30°$.

17. 1) $H\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=H\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) partea dela vîrf şi partea dela bază se raportă ca $\cos^2\frac{\alpha}{2}:\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Pentru conul cu secţiunea axială un triunghi echilateral obţinem: 1) $x=\frac{3}{4}$ din generatoare; 2) 3 : 1. *Indrumare.* Suprafeţele laterale ale conurilor asemenea se raportă ca pătratele înălţimilor conurilor.

18. $360°\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$; 1) $180°$; 2) $207°{,}5$. 19. $\frac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$.

20. $\frac{\pi m^2}{\sqrt{1+3\sin^2\alpha}}$. 21. $\frac{\pi(m^2-n^2)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$. 22. $\frac{(R^2-r^2)\sin\delta}{2\cos\beta}$.

23. $\pi h^2 \sec \alpha$. 24. $\cos \varphi = \frac{m-n}{p}$. 25. $S_{lat} = \pi l^2 \sin \alpha = 426$;

$S_{tot} = 2\pi l^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right) = 652$. 26. $\frac{Q-q}{\cos \alpha}$.

§ 21.

1. $\frac{1}{2} l^3 \sin \beta \sin \varphi \cos^2 \varphi$. 2. $\frac{1}{2} d^3 \sin \alpha \operatorname{tg} \beta \sin \frac{\alpha}{2} \approx 58{,}603\ dm^3$.

3. $2ab \sin \alpha \sqrt{ab \cos \alpha}$. 4. $\frac{1}{4} d^3 \sin 60^\circ \operatorname{tg} \varphi = 1000\ dm^3$; 30°.

5. $V = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$; $\sin x = \sqrt{-\cos 2\alpha}$; $(x = 45^\circ)$.

6. $\frac{a^3}{\sin \alpha}\sqrt{\cos 2\alpha}$. 7. $\frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = 271{,}69\ cm^3$.

8. $\frac{3a^3}{8 \sin \frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$. 9. $516\ m^3$.

10. $V = \frac{a^2 b^2 \sin^2 \gamma}{2(a+b)\cos\varphi} = 17\,854\ dm^3$. *Indrumare.* $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma =$

$= (a+b)^2 \cos^2 \varphi$, unde $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{ab}\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$ (vezi § 11, № 62)

11. $\frac{4r^2 h \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha} = 3{,}6267\ m^3$.

12. *Indrumare.* Mai întîi calculăm suprafaţa triunghiului FCD, apoi suprafaţa triunghiului FAB; $\frac{hb \sin \alpha \cos \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}$.

13. $\frac{a^2 b}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. *Indrumare.* Exprimaţi volumul cu ajutorul secţiunii perpendiculare.

14. $\frac{1}{6} n b^3 \cos^2 \beta \sin \beta \sin \frac{360^\circ}{n} = 1{,}535\ m^3$. 15. $\frac{4}{3} b^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos \alpha}$.

16. $\frac{2}{3} h^3 \operatorname{ctg}^2 \varphi \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$. 17. $\frac{b^3}{6} \sin \frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos \alpha}$.

18. $\frac{2}{3} a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi$. 19. $\frac{1}{24}(a+b)^2\sqrt{a(a-2b)} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

20. $\frac{1}{6} P\sqrt{P \operatorname{tg} \alpha} \operatorname{tg} \varphi$. *Indrumare.* Fie că înălţimea piramidei întîlneşte baza în punctul E. Atunci linia BED este *dreapta* perpendiculară pe BC şi AD.

21. $V_A = \frac{V \sin \beta}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = 138{,}05$. *Indrumare.* $V_A : V_B =$ $= \sin B : \sin A$.

22. $45^\circ 17' 22''$ şi $25^\circ 14' 22''$.

23. $V = \frac{a^3 - b^3}{6} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^3}{6} \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \alpha$, unde $\sin^2 \varphi = \frac{b^3}{a^3}$; $V = 227{,}1 \approx 230 m^3$.

24. $V = \frac{a^3 - b^3}{6 \cos \alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha} = \frac{a^3 \cos^2 \varphi}{6 \cos \alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$, unde $\sin \varphi = \sqrt{\frac{b^3}{a^3}}$; $V = 4302{,}3$.

25. $\frac{n(a^3 - b^3) \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}}{24 \sin \frac{180^\circ}{n}} \cdot \operatorname{tg} \alpha$. 26. $\frac{d^3 \cos \alpha \,.\, \sin 2\alpha}{8\pi}$.

27. $\frac{\pi a^2 h}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 7895{,}5\ dm^3$. 28. $\frac{\pi a^3}{4 \sin^3 \frac{180^\circ}{n}}$.

29. $V = \frac{D^2}{8} \cdot \frac{\pi \alpha}{180} \cdot \frac{\sin(45^\circ - \varphi)}{\cos 45^\circ \,.\, \cos \varphi} \cdot l$, unde $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha \cdot 180}{\pi \alpha}$; $V \approx 2{,}1\ m^3$.

30. $\frac{\pi b^2 H}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$.

31. $V = \frac{\pi Q}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin^3 \frac{180^\circ}{n}}\sqrt{Q \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

32. $\frac{c^3 d \operatorname{tg} \varphi}{24 \pi^2} \approx 5{,}4$. 33. $\frac{\pi}{3} l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$. 34. $\frac{\pi h^3}{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

35. $S = \frac{2\pi R^2}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$; $V = \frac{\pi R^3}{3} \operatorname{tg} \alpha$.

36. $\frac{\pi R^3}{3} \sin^3 \alpha \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

37. $\frac{\pi a^3 \operatorname{ctg} \beta}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}$. 38. $\frac{\pi d^3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}} = 298{,}99\ m^3$.

39. $\frac{\pi R^3 \sin(\alpha - \beta)}{3 \cos \alpha \cos \beta} = 301{,}94\ dm^3$. 40. $\frac{\pi}{3}(R^3 - r^3) \operatorname{tg} \alpha$. 41. $\frac{7}{6} \pi l^3 \sin 2\varphi \cos \varphi$.

42. $r = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{\pi} V + r_1^3 \operatorname{tg} \alpha + r_2^3 \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}} = 3{,}43\ m$; $h_1 = (r - r_1) \operatorname{tg} \alpha = 19{,}02\ m$; $h_2 = (r - r_2) \operatorname{tg} \beta = 3{,}93\ m$.

43. $\frac{7}{6}\pi a^3 \sin\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = 28052{,}5\ dm^3$. 44. $\frac{\pi}{12} l^3 \sin\alpha(2-\cos 2\alpha) = 1181{,}5$.

§ 22.

1. $3562\ km$. 2. $36\,720\ km$; $15\,930\ km$. 3. $\frac{2r\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$.

4. $\frac{V}{2}\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} = 10{,}515\ dm^3$. 5. $\frac{\sin^2 2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{2} = 0{,}29629$.

6. $\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. 7. $\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}\sin 2\alpha}$ $5{,}1\ m$. 8. $\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

9. $2C\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

10. $x = 2R\cdot\operatorname{cosec}60^\circ\cdot\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. *Indrumare.* Mai ducem din punctul comun al coardelor încă un diametru şi însemnăm coarda prin x, exprimăm distanța dela capătul ei pînă la diametru: ea va fi egală cu $x\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cosec}60^\circ$. Construind jumătatea de circonferință a cercului mare, care cuprinde diametrul luat şi coarda luată, şi unind capătul coardei cu celalt capăt al diametrului, formăm ecvația: $x\cdot\sqrt{4R^2-x^2} = 2R\cdot x\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}60^\circ$.

11. $70^\circ 31' 43''$.

12. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2m}}}$; $\alpha_1 = 78^\circ 27' 50''$; $\alpha_2 = 60^\circ$.

13. $\sin\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\alpha = 52^\circ 32'$. 14. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\alpha = 70^\circ 31' 46''$.

15. $\sin\alpha = \sqrt{\frac{n}{m}}$; $(\alpha = 45^\circ)$. 16. $\frac{\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}$.

17. 1) $4\pi r_1 r_2$; 2) $\cos z = \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$ sau $\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$. 18. $\sin\frac{ABC}{2} = \frac{m-n}{m+n}$.

19. $\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2}}$, sau $\frac{2}{3}\pi R^3\operatorname{tg}2\varphi$, presupunînd $\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\varphi$.

20. $\frac{4}{3}\pi R^3 d\cos^4\frac{\varphi}{2}\left(3 - 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$. 21. $3652\ m^3 \approx 3700\ m^3$.

22. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}-1$; $\alpha = 48^\circ 56' 22''$. 23. $\frac{\pi\alpha^2}{4}\sec^2\frac{\alpha}{4}$.

24. $4\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{4} = 574{,}9\ dm^2$. 25. $\frac{\pi b^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 4279{,}9\ dm^3$.

26. $V\cdot\sin^2\frac{\alpha}{4}$. 27. $\frac{\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\varphi}$, unde $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}$.

28. $\sin\alpha = \frac{n-m}{n+m}$; $(\alpha = 30^\circ)$. 29. $\sin\left(x+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{m}{n}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$; $(x = 15^\circ)$

30. $\frac{\pi R^3\sin^3\frac{\alpha}{2}}{6\cos^6\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$; $\frac{\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$.

§ 23.

1. $S = \pi a^2\cdot\frac{\sin B\cdot\sin C\cdot\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin(B+C)\cdot\cos\frac{1}{2}(B+C)}$; $V = \frac{\pi a^3}{3}\cdot\frac{\sin^2 B\cdot\sin^2 C}{\sin^2(B+C)}$.

2. $4\pi Q\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\beta}{4}\right) = 1736{,}7$.

3. $\frac{2}{3}\pi ab^2\operatorname{tg}^2\alpha = 300{,}86\ dm^3$. 4. $2\pi a^2\sqrt{3}\cdot\sin(30^\circ+\alpha)$

5. $\frac{1}{3}\pi b^3\sin^2\alpha$; $4\pi b^2\sin\alpha\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$; pentru $\alpha = 120^\circ$; $V = \frac{\pi b^3}{4}$; $S = \frac{1}{2}\pi b^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$. 6 $8\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $2\pi a^3\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

7. $\pi a^2 n^2\sin\frac{\alpha}{2}$. 8. $\frac{\pi}{3}\cdot bc(b+c)\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$.

9. $\frac{\pi}{6}\cdot\frac{a^3\operatorname{tg}2\alpha}{\cos 2\alpha}$. 10. $\frac{2}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

11. $V_a : V_b : V_c = \operatorname{cosec}A : \operatorname{cosec}B : \operatorname{cosec}C$.

12. $V = \frac{\pi b^3\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin 30^\circ\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} = 47\,088\ cm^3$;

$$S = \frac{4\pi b^2}{\sin\frac{\alpha}{2}} \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) = 8459\ cm^2.$$

13. $\frac{4}{3}\pi(1+\cos^2\alpha)\sqrt{\frac{S^3}{\sin 2\alpha}}$.

14. $\frac{1}{2}\pi d^3 \sin 2\alpha = 57\,350\ m^3$; $4\pi d^2 \cdot \sin 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha) = 10110\ m^2$.

15. $\frac{10 - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}\pi a^3$. 16. $\frac{\pi p^3\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha}{3\cos^3\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = 378{,}69\ dm^3$.

17. $\frac{8\pi r^2}{\sin^2\alpha}\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$. 18. $\frac{2\pi h^3}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2$.

19. 1) $S = 4\pi r^2 \cdot \sec\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \sec\frac{180^\circ}{n}$;

2) $S = 4\pi R^2 \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cos^2\frac{180^\circ}{n}$;

3) $S = \pi a^2 \mathrm{ctg}^2\frac{180^\circ}{n} \cdot \sec\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{\pi}{6}a^3 \mathrm{ctg}^3\frac{180^\circ}{n} \sec\frac{180^\circ}{n}$.

20. 1) $S = 2\pi r^2\left(2 + \mathrm{tg}^2\frac{180^\circ}{n}\right)$; $V = \frac{2}{3}\pi r^3\left(2 + \mathrm{tg}^2\frac{180^\circ}{n}\right)$;

2) $S = 2\pi R^2\left(1 + \cos^2\frac{180^\circ}{n}\right)$; $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \cos\frac{180^\circ}{n}\left(1 + \cos^2\frac{180^\circ}{n}\right)$;

3) $S = \pi x^2\left(\mathrm{ctg}^2\frac{180^\circ}{n} + 0{,}5\right)$; $V = \frac{\pi a^3}{6}\mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n}\left(\mathrm{ctg}^2\frac{180^\circ}{n} + 0{,}5\right)$.

21. 1) $S = 4\pi r^2 \cdot \cos^4\frac{90^\circ}{n}\sec^2\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \cos^4\frac{90^\circ}{n} \cdot \sec^3\frac{180^\circ}{n}$;

2) $S = 4\pi R^2 \cdot \cos^4\frac{90^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \cos^4\frac{90^\circ}{n} \cos\frac{180^\circ}{n}$;

3) $S = \frac{\pi a^2}{4} \cdot \mathrm{ctg}^2\frac{90^\circ}{n}$; $V = \frac{\pi a^3}{24} \cdot \mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n} \cdot \mathrm{ctg}^2\frac{90^\circ}{n}$.

22. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \sin^4\frac{\alpha}{2}$; $S = 8\pi R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}$. 23. $\frac{4}{3}\pi r^3 \sin\beta \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

24. $2Q \cdot \frac{360^\circ}{\alpha}\left(2\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2Q \cdot \frac{360^\circ}{\alpha} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) \cdot \mathrm{cosec}\,\varphi =$

$= 4259{,}1\left(\text{cînd } \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{2}\right)$.

25. $\cos\alpha = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; $\alpha = 32^\circ 45' 53''$. 26. $\pi a^2 \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{4}$; $\frac{\pi a^3}{6}$.

CUPRINSUL.

Partea I.

Trigonometria.

Partea II.

Probleme de geometrie, care cer aplicarea trigonometriei.

Redactor răspunzător I. Cornfeld
Redactor tehnic M. Dobrominschi
Corector I. C.
Dată la cules 3-V-1937
Iscălită la tipar 15-VII-1937
Formatul $82 \times 111^1/_{32}$
Coale de tipar 7
Coale de hîrtie $3^1/_2$
Imputernicitul Glavlit T-1248
Tiraj 1200
Comanda 60
Preţul 65 cop., coperta 25 cop.

Tiraspol. Tipografia „Tipmold"

PREȚUL 90 cop.

Н. РЫБКИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ПЕРЕРАБОТАНО В. А. ЕФРЕМОВЫМ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО МОЛДАВИИ
Тирасполь 1937