АЛГЕБРА,

сочиненная по руководству

ФРАНКЕРА, ЛАКРУА

И

ДРУГИХЪ НОВѢЙШИХЪ МАТЕМАТИКОВЪ

МАГИСТРОМЪ

Физико-Математическихъ наукъ

ПАФНУТІЕМЪ АѲАНАСЬЕВЫМЪ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

МОСКВА,

ВЪ ТИПОГРАФІИ Н. С. ВСЕВОЛОЖСКАГО.

1816.

Печатать дозволяется съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи, до выпуска въ продажу, представлены были въ Ценсурный Комитетъ: одинъ экземпляръ сей книги для Ценсурнаго Комитета, другой для Департамента Министерства Народнаго просвѣщенія; два экземпляра для ИМПЕРАТОРСКОЙ Публичной библіотеки и одинъ для ИМПЕРАТОРСКОЙ Академіи Наукъ. Декабря 11 дня, 1814 года. По назначенію Ценсурнаго Комитета, при ИМПЕРАТОРСКОМЪ Московскомъ Университетѣ учрежденнаго, книгу сію разсматривалъ Ординарный Профессоръ

ИВАНЪ ДВИГУБСКІЙ.

ЕГО СІЯТЕЛЬСТВУ

КНЯЗЮ

АЛЕКСАНДРУ НИКОЛАЕВИЧУ

ГОЛИЦЫНУ,

Господину Тайному Совѣтнику, Государственнаго Совѣта Члену, Сенатору, Святѣйшаго Правительствующаго Сунода Оберъ-Прокурору, Главноуправляющему духовными дѣлами иностранныхъ исповѣданій, ЕГО ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА Статс-Секретарю, Дѣйствительному Камергеру, Коммисіи Духовныхъ училищъ Члену, Орденов Святаго Александра Невскаго, Святаго равноапостольнаго Князя Владиміра большаго креста 2й степени, Святыя Анны 1го класса и Прускаго Краснаго Орла Кавалеру, и Святаго Іоанна Іерусалимскаго Командору.

Въ знакъ глубочайшаго высокопочитанія

подноситъ опытъ трудовъ своихъ

Пафнутій Аѳанасьевъ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Важныя открытія Математиковъ, жившихъ въ исходѣ прошедшаго столѣтія, произвели новыя отрасли *науки о количествахъ* (1). Каждая часть получила новыя начала и новыя теоріи. Изложеніе истинъ сдѣлалось яснѣе и строже. Все сіе перемѣнило самой учебной порядокъ Математики. Прежніе курсы сдѣлались недостаточными; число истинъ въ нихъ помѣщенныхъ мало, способы изложенія ихъ неясны и слабы. — Мѣсто курсовъ *Лякаля*, *Безу*, *Бюржа* и другихъ по части чистой Математики, заняли учебныя книги *Лакруа*, *Франкера* и нѣкоторыхъ другихъ новѣйшихъ Математиковъ. Желая принесть пользу соотечественникамъ я намѣренъ издать курсъ чистой Математики, совершенно начертанный по способу новѣйшихъ Математиковъ, и заключающій въ себѣ начала твердыя и теоріи строгія. Такъ какъ превосходство курсовъ Лакруа и Франкера предъ всѣми прочими иностранными и отечественными довольно извѣстно; то я и несчитаю за нужное подробно описывать объ

---

(1) Объ частяхъ, составляющихъ Математику въ нынѣшнемъ ея видѣ, можно видѣть въ Ариѳметикѣ мною изданной.

издаваемомъ мною курсѣ. Ибо я руководствовался ими самими, и помѣщалъ тѣже истины и тѣми же способами излагаемыя, какими у нихъ; а противъ ихъ сдѣлалъ нѣкоторыя перемѣны потому только, что находилъ иныя теорïи у другихъ новѣйшихъ Математиковъ обработанными гораздо лучше. Порядокъ изложенïя истинъ и теорïй сколько можно старался содѣлать ясными и соотвѣтствующими начинающему учиться Математикѣ. Впрочемъ сужденïе объ курсѣ, которой намѣреваюсь я издать, предоставляю Просвѣщенной Публикѣ.

Относительно предлагаемой здѣсь Алгебры скажу, что я почти ничего неопустилъ, дабы сдѣлать ученïе ее яснымъ. Каждую теорïю старался при ея строгости содѣлать какъ можно простѣе, и пояснялъ примѣрами. Для рѣшенïя высшихъ уравненïй я помѣстилъ способъ *соизмѣримыхъ дѣлителей* и *способъ приближенïя* потому, что они просты и удовлетворительны; прочïе способы затѣмъ не изложилъ, что употребленïе ихъ затруднительно, и что симъ обременилъ бы учащагося, которому полезнѣе напередъ узнать прочïя части Математики, нежели способы сïи.

АЛГЕБРА.

ГЛАВА I.

О предметѣ Алгебры.

1. *Алгебра*, разсматриваемая въ пространномъ смыслѣ, есть наука, помощïю которой мы выражаемъ кратко и ясно всѣ разсужденïя, относящïяся къ различнымъ соотношенïямъ количествъ между собою.

2. *Алгебра* есть *Всеобщая Ариѳметика*, потому что она, какъ мы увидимъ послѣ, способна разрѣшать всѣ вопросы до чиселъ относящïеся.

3. Постановленïе цыфръ вмѣсто словъ дѣлаетъ прощѣ числовыя выраженïя и облегчаетъ ихъ дѣйствïя; но употребленïе общихъ знаковъ, въ Алгебрѣ принятыхъ, гораздо болѣе. Алгебра показываетъ весь ходъ дѣйствïя, чего числа, смѣшиваясь по ихъ производству чрезъ различныя дѣйствïя вмѣстѣ, представить не могутъ. Ея результаты суть результаты всеобщïе и всегда могутъ быть принаровлены легко къ частнымъ случаямъ; какъ то все сïе мы увидимъ при рѣшенïи вопросовъ.

4. *Алгебра* раздѣляется на *Элементарную*, и *Высшую* или *Трансцендентную*. Предметъ первой состоитъ въ показанiи правилъ опредѣлять по даннымъ условiямъ величины неизвѣстныхъ количествъ посредствомъ извѣстныхъ. Второй же предметъ составляютъ изчисленiя *Дифференцiальное*, *Интегральное* и *Варiацiональное*.

Въ Дифференцiальномъ изчисленiи разсматриваются измѣненiя количествъ.

Въ Интегральномъ сыскиваются уравненiя, въ которыхъ перемѣнныя количества, измѣнялись бы по даннымъ условiямъ.

Въ Варiацiональномъ же разсматриваются измѣненiя вида самыхъ уравненiй, связывающихъ перемѣнныя количества.

5. Приложенiе Алгебры къ рѣшенiю Ариѳметическихъ и Геометрическихъ вопросовъ составляетъ *Аналитику*, которая въ первомъ случаѣ можетъ быть названа *Ариѳметическою*, а во второмъ *Геометрическою*.

6. Чтобъ показать какъ Алгебра поступаетъ при опредѣленiи неизвѣстныхъ количествъ чрезъ извѣстныя, и въ чемъ она имѣетъ преимущество предъ Ариѳметикою, мы рѣшимъ для сего слѣдующiй вопросъ: отецъ по смерти оставилъ 24000 руб. тремъ сынамъ, которые между собою должны раздѣлить такимъ образомъ, чтобъ среднiй сынъ противъ младшаго взялъ $\frac{3}{4}$ съ 1200 рублями; а старшiй чтобъ взялъ

противъ обоихъ безъ 1500 руб.; спр. часть каждаго?

Замѣчаю что сумма частей всѣхъ трехъ сыновей должна равнятся 24000 руб. и естьлибъ я зналъ часть младшаго, то бы сказалъ: часть средняго равна $\frac{3}{4}$ младшаго съ 1200 рублей; а часть старшаго равна части младшаго съ $\frac{3}{4}$ его же части и съ 1200 рублей безъ 1500 руб. И такъ 1^{e}) часть младшаго, сложенная съ ея же $\frac{3}{4}$, 1200 руб., частiю младшаго, и ея же $\frac{3}{4}$, 1200 руб. безъ 1500 руб. равна 24000 руб. Слѣдовательно:

2^{e}) Два раза взятая часть младшаго, сложенная съ 2жды взятыми $\frac{3}{4}$ той же части и 2жды взятыми 1200 рублей безъ 1500 руб. равна 24000 рублей; или:

3^{e}) Дважды взятая часть младшаго, сложенная съ ея $\frac{6}{4}$ и съ 2400 руб., безъ 1500 руб. равна 24000 рублямъ; или:

4^{e}) $\frac{14}{4}$ или $\frac{7}{2}$ части младшаго съ 900 рублей равна 24000 руб.

Но понеже къ $\frac{7}{2}$ части младшаго должно приложить 900 руб. чтобъ произошло 24000 руб. то сiе означаетъ что 24000 руб. превосходятъ $\frac{7}{2}$ части младшаго 900 рублей. И такъ:

5^{e}) $\frac{7}{2}$ части младшаго равны 24000 рублямъ безъ 900 рублей; или:

6^{e}) $\frac{7}{2}$ части младшаго равны 23100 рублей; или:

7^{e}) 7 разъ взятая часть младшаго равна 2 жды взятымъ 23100 рублямъ, или 46200 рублямъ; и

8^e) Часть младшаго равна $\frac{1}{7}$ части 46200 руб. или 6600 руб.

Такъ какъ часть средняго равна $\frac{3}{4}$ младшаго съ 1200 рублей, то она равна $\frac{3}{4}$ частямъ 6600 съ 1200 рублей, равна 6150 руб. Часть старшаго равна суммѣ обоихъ первыхъ безъ 1500 рублей; слѣдовательно она равна 11250 рублямъ.

Въ самомъ дѣлѣ сумма частей всѣхъ трехъ братьевъ будетъ равна 24000 руб.

Чтобъ удобнѣе получить сіи результаты, то мы означимъ слово *съ* или *сложенное* чрезъ $+$, *безъ* чрезъ $-$, *умноженное* чрезъ $\times$, или. , *раздѣленное* чрезъ черту — поставляемую между дѣлимымъ и дѣлителемъ, *равно* чрезъ $=$; также замѣтимъ что неизвѣстныя количества означаются буквами x, y, z, t, u; прочія же буквы означаютъ извѣстныя количества.

И такъ пусть будетъ часть младшаго $= x$ то часть средняго $= \frac{3}{4}x + 1200$.

Часть старшаго $= x + \frac{3}{4}x + 1200 - 1500$.

Слѣдовательно

1^e) $x + \frac{3}{4}x + x + \frac{3}{4}x + 2.\ 1200 - 1500 = 24000$.

2^e) $2x + \frac{6}{4}x + 2400 - 1500 = 24000$.

3^e) $\frac{7}{2}x + 2400 - 1500 = 24000$.

4^e) $\frac{7}{2}x + 900 = 24000$.

5^e) $\frac{7}{2}x = 24000 - 900$.

6^e) $\frac{7}{2}x = 23100$.

7^e) $7x = 46200$.

8^e) $x = \frac{46200}{7}$.

9^e) $x = 6600$.

И такъ младшій получитъ 6600 рублей.

Средній $\frac{3}{4}.\ 6600 + 1200 = \frac{19800}{4} + 1200 = 4950 + 1200 = 6150$ руб.

Старшій $6600 + 6150 - 1500 = 12750 - 1500 = 11250$.

Очевидно, что ходъ дѣлопроизводства совсѣмъ независимъ отъ чиселъ въ немъ употребленныхъ; и что онъ будетъ тотъ же естьлибъ числа взяли другія. — Слѣдовательно естьлибъ мы употребили другіе знаки, которыебъ опредѣленной величины не имѣли, тобъ они намъ дали результатъ общій; то есть такой, которой могъ бы быть принаровленъ для всякаго случая, — для сего только надлежитъ дать знакамъ опредѣленныя величины. — Знаки сіи также показалибы намъ весь ходъ дѣйствія, чего числа не могутъ, по причинѣ ихъ между собою смѣшенія. Сіи то причины побудили количества изображать буквами. —

И такъ пусть имѣніе отца $= a$, 1200 р. $= b$, 1500 р. $= c$. $\frac{3}{4} = \frac{d}{e}$, или $3 = d$, $4 = e$, часть же младшаго пусть $= x$.

Слѣдовательно часть средняго будетъ $= \frac{d}{e}.\ x + b$.

Часть старшаго будетъ $= x + \frac{d}{e}.\ x + b - c$.

И так $1^e\ x + \frac{d}{e}.\ x + b + x + \frac{d}{e}.\ x + b - c = a.$

$2^e\ 2x + \frac{2d}{e}.x + 2b - c = a.$

$3^e\ \frac{2ex + 2dx}{e} + 2b - c = a.$

$4^e\ \frac{2ex + 2dx}{e} = a - (2b - c).$

$5^e\ 2ex + 2dx = [a - (2b - c)]\ e.$

$6^e\ 2(e + d)\ x = [a - (2b - c)]\ e.$

$7^e\ x = \frac{(a - (2b - c)\ e}{2(e+d)}$

Замѣтимъ, что дабы вычесть изъ a, 2b — c, должно 2b — c заключить въ скобку, и предъ оною поставить знакъ — то есть написать $a - (2b - c)$; также, чтобъ означить $a - (2b - c)$ умножено на e, должно написать $[a - (2b - c] \times e$ или безъ знака $\times$, то есть $[a - (2b - c] e$. Также $2ex + 2dx$ разложивши на факторы будетъ $2(e + d)\ x$; сїе дѣлается для отдѣленїя неизвѣстнаго отъ извѣстныхъ. Выраженїе $x = \frac{[a - (2b - c)]\ e}{2(e+d)}$ можетъ быть принаровлено ко всѣмъ вопросамъ одного рода съ даннымъ; по сей причинѣ такїя выраженїя называются *формулами*.

ГЛАВА II.

Объ одночленныхъ количествахъ.

7. *Сложенїе* количествъ есть совокупленїе ихъ вмѣстѣ. Количество равное прочимъ вмѣстѣ взятымъ называется *суммою*; такимъ образомъ сумма количествъ a, b, c, d, будетъ $a + b + c + d$, или $a + b + d + c$, или $a + c + d + b$.

8. Всѣ количества разсматриваемыя въ Алгебрѣ бываютъ или съ знакомъ +, или съ знакомъ —; то есть бываютъ или *положительныя* или *отрицательныя*.

Всякое количество само по себѣ положительное, но оно дѣлается, или, лучше сказать, бываетъ отрицательнымъ относительно къ другому совершенно противнаго свойства. На примѣръ имѣнїе и долгъ, каждое само по себѣ количество положительное; но разсматривая ихъ вмѣстѣ мы, по противному свойству ихъ, должны одно отъ другаго отличить: знаки + и — самое натуральное ихъ отличїе, такъ что принявши имѣнїе за положительное количество, долгъ будетъ отрицательное количество. Въ самомъ дѣлѣ знакъ — предъ долгомъ стоящїй, намъ тотчасъ показываетъ, что долгъ имѣнїе умаляетъ; сїе весьма натурально. Напротивъ принявши долгъ за положительное количество, имѣнїе будетъ отрицательное, и тогда знакъ — предъ имѣнїемъ стоящїй будетъ показывать, что имѣнїе уменьшаетъ долгъ; сїе опять натурально.

9. И такъ *количества отрицательныя совершенно противны положительнымъ.* Слѣдовательно $a - a = o$, $b - b = o$. и проч.

10. *Сумма количествъ должна быть одного рода съ слагаемыми;* слѣдовательно *сумма положительныхъ количествъ должна быть положительная;* а *сумма отрицательныхъ отрицательная.*

И такъ 1^e. $a + a = 2a$

$a + a + a = 2a + a = 3a$

$a + a + a + a = 2a + a + a = 3a + a = 4a$

$a + a + a + a + a = 4a + a = 5a.$

: : : : : : : : : : : :

$15a + a = 16a.$

$25a + a = 26a.$

: : : : : : : : : : : :

$12a + 5a = 17a.$

$18a + 2a = 20a.$

и проч.

2^e. $- b + - b = - b - b = - 2b.$

$- 2b + - b = - 2b - b = - 3b.$

$- 3b + - b = - 3b - b = - 4b.$

: : : : : : : : : : : :

$- 17b + - b = - 17b - b = - 18b.$

$- 8b + - b = - 8b - b = - 9b.$

: : : : : : : : : : : :

$- 16b + - 2b = - 16b - 2b = - 18b.$

$- 3b + - 5b = - 3b - 5b = - 8b.$ и пр.

11. Отсюда заключимъ 1^e) *число, стоящее предъ буквою означаетъ сколько разъ та буква сложена сама съ собою:* число сїе называется *коеффицїентомъ*, и онъ есть 1, когда ни какого числа предъ буквою не написано.

12. 2^e. *Чтобъ сложить количества, изображенныя одинакими буквами, должно сложить ихъ коеффицїенты, и написать предъ численою суммою общїй знакъ, а за нею общую букву;* такимъ образомъ $17m + 22m = 39m$, $- 2p - p - 3p = - 6p$.

13. *Вычесть* одно количество изъ другаго, значитъ сыскать такое третїе, которое будучи сложено съ первымъ дало бы второе. Первое изъ данныхъ количествъ называется *вычитаемымъ*, второе *уменьшаемымъ*, а искомое *разностїю*.

Разность между:

a и $b = a - b$; ибо $a - b + b = a$.

a и $- b = a + b$, ибо $a + b - b = a$.

$8a$ и $+ 5a = 8a - 5a = 3a$; ибо $3a + 5a = 8a$.

$4b$ и $- 7b = 4b + 7b = 11b$; ибо $11b - 7b = 4b + 7b - 7b = 4b$.

И такъ при вычитанїи въ вычитаемомъ количествѣ знакъ + перемѣняется на —, а — на +.

14. Когда изъ меньшаго положительнаго количества должно вычесть большее, тогда должно вычесть уменьшаемое изъ вычитаемаго и предъ остаткомъ поставить знакъ —; такимъ обра-

зомъ разность между 5 a и 8 a будетъ $5a - 8a = -3a$; ибо $8a - 3a = 5a$.

15. И такъ 1^е) количества отрицательныя можно всегда разсматривать изображающими разность двухъ количествъ, изъ которыхъ уменьшаемое меньше вычитаемаго.

Вообще на пр. изъ числа 5 вычитая постепенно 1 получимъ разности:

$$+4, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, -4. \text{ и проч.}$$

16. 2^е) *Сумма положительныхъ и отрицательныхъ количествъ равна разности между суммою положительныхъ и суммою отрицательныхъ.* Такимъ образомъ: $8a - 5a - 2a + 7a - 3a = 15a - 10a = 5a$.

$$7m - 3m - 8m + 2m - 5m = 9m - 16m = -7m.$$

17. *Умножить одно количество на другое* значитъ найти такое третїе, которое бы столько разъ содержало первое сколько второе единицу. Первое изъ оныхъ количествъ называется *множимымъ*, второе *множителемъ* а третїе *произведенїемъ;* множимое и множитель общимъ именемъ называются *факторами произведенїя.* Знакъ умноженїя есть $\times$ или $\cdot$; то есть произведенїе изъ a на b означается $a \times b$, или $a \cdot b$ или ab.

18. При умноженїи должно наблюдать слѣдующїя четыре правила:

I^е. *Правило буквъ:* $a \times b = a.b = ba$, *но согласились писать буквы множимаго и множителя однѣ подлѣ другихъ, сохраняя азбучный порядокъ.* Такимъ образомъ $ae \times bcf = abcef$.

II^е. *Правило коеффицїентовъ: должно помножить коеффицїентъ множимаго на коеффицїентъ множителя на пр:* $4a \cdot 3b = 12ab$; ибо $4a \cdot 3b = 4a(b + b + b) = 4ab + 4ab + 4ab = 12ab$.

$$5a \cdot 2 = 10a, \text{ ибо } 5a \times 2 = 5a + 5a = 10a.$$

III^е. *Правило знаковъ: когда въ множимомъ и множителѣ знаки одинакїе, тогда произведенїе положительное; естьлижъ знаки въ факторахъ разные, произведенїе отрицательное:* то есть

$$+\times+=+,\ -\times-=+,\ +\times-=-,\ -\times+=-.$$

Всякое положительное количество, будучи помножено на положительное даетъ произведенїе положительное; потому что произведенїе всегда мы можемъ разсматривать, составленнымъ изъ множимаго точно такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы; слѣдовательно помножить $+a$ на $+b$ значитъ составить произведенїе изъ $+a$ такъ, какъ $+b$ составлено изъ 1, но $+b$ составлено изъ $+1$ взятой b разъ; и такъ произведенїе должно состоять изъ $+a$ взятаго b разъ, слѣдовательно $+a \times +b = +ab$.

$-b \times +a = -ab$; ибо помножа $+b - b = 0$ на $+a$ произведенїе должно быть равно нулю, потому что нуль сколько бы мы небрали все будетъ нуль; но $+b$ на $+a = +ab$; слѣдовательно $-b \times +a$ должно быть $-ab$.

$+a \cdot -b = -ab$; ибо помножа $+a$ на $+b - b = 0$, произведенїе должно быть равно нулю; понеже всякое количество, будучи помножено на нуль, должно быть въ произведенїи нуль. Но $+a \times +b = +ab$; слѣдовательно $+a \times -b$ должно быть $-ab$.

$-a \times -b = +ab$ ибо помножа $+a - a = 0$ на $-b$, произведенїе должно произойти равное нулю; но $+a \times -b = -ab$ слѣдовательно $-a \times -b$ должно быть $+ab$.

IV. *Правило показателей:*

$$a \times a = a^2$$
$$a^2 \times a = a^3$$
$$a^3 \times a = a^4$$
$$a^4 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa = a^5.$$

Числа надъ буквами стоящїя, и показывающїя сколько разъ буква множится сама на себя, называются *показателями*. Когда надъ буквою не стоитъ никакого числа, то показатель въ семъ случаѣ 1 ца; въ выраженїи a^m буква m представляетъ всякое число и показываетъ что a умножено само на себя m разъ. При умноженїи одинакихъ буквъ показатели складываются, на пр. $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Ибо показатель означаетъ сколько разъ количество служитъ факторомъ, слѣдовательно

показатель произведенїя изъ a^m на a^n долженъ быть $m + n$.

19. Чтобъ умножить $4b^2c$ на $-3d^2$ говорю $+$ на $- = -$, $4 \times 3 = 12$, $b^2c \times d^2 = b^2cd^2$, слѣдовательно $4b^2c \times -3d^2 = -12b^2cd^2$. Дабы помножить $-a^3bd$ на $-9a^2bcf$, говорю $- \times - = +$, $1 \times 9 = 9$ $a^3 \times a^2 = a^5$, $b \times b = b^2$, $d \times cf = cdf$ и такъ $-a^3bd \times -9a^2bcf = 9a^5b^2cdf$.

20. *Раздѣлить одно количество на другое* значитъ сыскать такое третїе, которое бы содержало въ себѣ столько разъ единицу сколько первое содержитъ разъ второе; иначе сказать: найти такое третїе, которое будучи помножено на второе дастъ первое. *Дѣлимымъ* называется первое изъ оныхъ количествъ, *дѣлителемъ* второе, а *частнымъ* третїе. $a:b$ означается $\frac{a}{b}$.

21. При дѣленїи количествъ надлежитъ наблюдать слѣдующїя четыре правила:

I^e. *Правило знаковъ: Частное двухъ количествъ съ одинакими знаками есть положительное, а съ разными отрицательное,* то есть:

$$\frac{+}{+} = +, \frac{-}{-} = +, \frac{+}{-} = -, \frac{-}{+} = -.$$

Ибо $+ \times + = +, + \times - = -, - \times + = +, - \times + = -$.

II^e. *Правило коеффицїентовъ: должно раздѣлить коеффицїентъ дѣлимаго на коеффицїентъ дѣлителя; числовое частное будетъ* *искомой коеффиціентъ частнаго Алгебраическаго:* коеффиціентъ сей будетъ дробь, когда дѣленіе сдѣлано безъ остатка быть не можетъ; онъ будетъ 1, когда коеффиціенты дѣлимаго и дѣлителя равны.

III^e. *Правило буквъ: должно написать буквы дѣлимаго надъ буквами дѣлителя, отдѣля ихъ чертою. Когда въ дѣлимомъ и дѣлителѣ находятся общія буквы и притомъ съ одинакими показателями, тогда ихъ въ частномъ писать не должно.*

Ибо $\frac{a}{a}=1$; такимъ образомъ $\frac{abc}{a}=bc$; $\frac{abd}{am}=\frac{bd}{m}$; $\frac{a}{an}=\frac{1}{n}$; $\frac{4a^2b}{2a^2}=2b$; и проч.

IV^e. *Правило показателей: когда въ дѣлимомъ и дѣлителѣ находятся одинакія буквы, но съ разными показателями, тогда ставятъ ту букву въ частномъ съ показателемъ равнымъ разности показателей дѣлимаго и дѣлителя.* На прим:

$\frac{a^3}{a}=a^2$, $\frac{5a^m}{2a}=2a^{m-1}$; ибо $a\times a^2=a^3$, $2a\times 2a^{m-1}=4a^m$.

22. Чтобъ раздѣлить $6abc$ на $2ab$, говорю, $+:+=+$, $6:2=3$, $abc:ab=c$; слѣдовательно $\frac{6abc}{2ab}=3c$.

Также $\frac{-4a^3bc}{-5a^2b^3}=\frac{4}{5}abc$; $-\frac{6a^3b^2d}{6a^2bcf}=-\frac{abd}{cf}$; $\frac{12a^3b^2}{12a^3b^4}=a^{3-3}b^{2-4}=a^0b^{-2}$ Посмотримъ теперь что значитъ выраженіе a^0b^{-2}.

Говорю $a^0b^{-2}=\frac{1}{b^2}$. Ибо 1^e.) $a^0=1$, потому что $a^0=\frac{a^3}{a^3}$; но $\frac{a^3}{a^3}=1$, поелику частное какого нибудь количества раздѣленнаго на себя равно единицѣ, слѣдовательно $a^0=1$. По сей же причинѣ $b^0=1$ $c^0=1$. И слѣдовательно $a^0=b^0=c^0$. И такъ *всякое количество, котораго показатель нуль, равно единицѣ. Всѣ количества, возведенныя въ нуль равны между собою.*

2^e) $b^{-2}=\frac{1}{b^2}$, потому что $b^{-2}=\frac{b^2}{b^4}$, но $\frac{b^2}{b^4}=\frac{b^2}{b^2\cdot b^2}$; слѣдовательно $b^{-2}=\frac{1}{b^2}$. Вообще $b^{-m}=\frac{1}{b^m}$; ибо $b^{-m}=\frac{b}{b^{m+1}}$, но $\frac{b}{b^{m+1}}=\frac{b}{b^m\cdot b}=\frac{1}{b^m}$; слѣдовательно $b^{-m}=\frac{1}{b^m}$. И такъ всякое количество, котораго показатель отрицательной, равно дроби, коей числитель 1, а знаменатель количество сіе возведенное въ тогожъ показателя со знакомъ $+$.

ГЛАВА III.

О составныхъ количествахъ.

23. Количества $4a$, $-5b$, $2ad$, $-7m$, $\frac{2a}{3}$ называются *одночленными:* количества же $2a+3b$, $5a-4d-2m$, составленныя изъ одночленныхъ называются *составными;* первое изъ оныхъ есть *двухчленное*, второе *трехчленное*.

24. Количества, изображенныя одинакими буквами, съ одинаками показателями, но имѣющія разные знаки и коеффиціенты называются *подобными*. На пр. количества $4a^2b^m$, $-2a^2b^m$, $-a^2b^m$, $\frac{3}{4}a^2b^m$ суть подобныя. Количества же $4a^3b$, $-2a^3b^4$, $7bd$, $-5mn$ суть неподобныя.

25. Составныя количества слагаются по тѣмъ же правиламъ по какимъ и одночленныя, а именно: *написавши ихъ одно подъ другое, должно подобныя количества, какъ съ знакомъ* $+$ *такъ и съ знакомъ* $-$, *сложить порознь; наконецъ меньшой коеффиціентъ вычесть изъ большаго и предъ остаткомъ написать тотъ знакъ какой находился предъ большимъ*. Такимъ образомъ:

Примѣръ 1.

$$\left.\begin{array}{l} 5a + 3b - 4c \\ 2a - 5b + 6c + 2d \\ a - 4b - 2c + 3e \\ \underline{7a + 4b - 3c - 6e} \end{array}\right\} \text{слагаемыя количества.}$$

$15a - 2b - 3c + 2d - 3e$ . . . сумма.

Примѣръ 2.

$$\begin{array}{l} 3ab^2 - 6abc + 5ac^2 \\ 4ab^2 + 3abc + 7ac^2 \\ \underline{-9ab^2 + 7abc - 3ac^2} \\ -2ab^2 + 4abc + 9ac^2. \end{array}$$

Примѣръ 3.

$$\begin{array}{l} 3ab + 5ac + 6cd + \frac{2}{3}ef - \frac{1}{3}d^2 \\ 7ab - 2ac - 4cd + \frac{1}{6}ef + \frac{3}{4}d^2 \\ \underline{-2ab + 6ac - 2cd - \frac{1}{2}ef + \frac{1}{2}d^2} \\ 8ab + 9ac + \frac{1}{3}ef + \frac{11}{12}d^2. \end{array}$$

26. Разность между a и $b - c = a - b + c$; ибо $a - b + c + b - c = a$.

И такъ, чтобъ вычесть одно количество изъ другаго, надлежитъ, по перемѣнѣ знаковъ въ вычитаемомъ, поступать такъ какъ въ сложеніи: то есть, если случатся подобныя количества, но съ разными знаками, то меньшой коеффиціентъ вычесть изъ большаго, и предъ остаткомъ поставить знакъ сего послѣдняго и общія буквы; естьли же подобныя количества будутъ съ одинакими знаками, тогда предъ суммою ихъ коеффиціентовъ поставить общій знакъ.

Такимъ образомъ: $4a + 2b - (5a - 6b) = -a + 8b$.

27. Вотъ еще нѣсколько примѣровъ:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & 6a - 3b + 8e - 12ad + 8m^2n^3 & \text{уменьшаемое.} \\ & \underline{\mp 4a \pm 4b \mp 2e \pm 6ad \mp 22m^2n^3} & \text{вычитаемое.} \\ & 2a + b + 6c - 6ad - 14m^2n^3 & \text{разность.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{II.} & 5a^4 - 7a^3b^2 - 3c^5d^2 + 7d \\ & \underline{\mp 3a^4 \pm 15a^3b^2 \pm 7c^5d^2 \pm 3m^2} \\ & 2a^4 + 8a^3b^2 + 4c^5d^2 + 7d + 3m^2. \end{array}$$

III. $$\begin{array}{r} 12a^2b - 16cd^2 + 22a^2c - \tfrac{3}{4}ac^2 + \tfrac{5}{6}m^3 \\ \underline{\pm\, 5a^2b \pm 7cd^2 \mp 15a^2c \pm \tfrac{1}{2}ac^2 \pm \tfrac{2}{3}m^3} \\ 17a^2b - 9cd^2 + 7a^2c - \tfrac{1}{4}ac^2 + \tfrac{3}{2}m^3 \end{array}$$

28. *Чтобъ помножить составное количество на одночленное, надлежитъ всѣ члены перваго помножить на сїе послѣднее.* Такимъ образомъ $2a + 4b - c$ умножа на $-d$, получимъ $-2ad - 4bd + cd$. Произведенїе сїе иногда означается такъ: $(2a + 4b - c) \times -d$.

29. *Чтобъ помножить составное количество на составное, должно умножить всѣ члены перваго на всѣ члены втораго, и частныя произведенїя сложить вмѣстѣ.*

Вотъ примѣръ: $a^2 - 3ab - 2b^2$ множимое

$$\begin{array}{r} 4a - 5b \text{ множитель.} \\ \hline 4a^3 - 12a^2b - 8ab^2 \\ - 5a^2b + 15ab^2 + 10b^3 \\ \hline 4a^3 - 17a^2b + 7ab^2 + 10b^3 \end{array}$$

Произведенїе изъ $a^2 - 3ab - 2b^2$ на $4a - 5b$ означается иногда такъ:

$(a^2 - 3ab - 2b) \times (4a - 5b)$, или $\overline{a^2 - 3ab - 2b^2} \times \overline{4a - 5b}$.

30. *Умножить $a + b$ на $a - b$?*

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

; отсюда слѣдуетъ, что *произведенїе суммы двухъ количествъ на ихъ разность, равно разности квадратовъ ихъ.*

31. Мы предложимъ еще нѣсколько примѣровъ для упражненїя:

I.

$$\begin{array}{r} 4a^2 - 6a + 9 \\ \times\ 2a + 3. \\ \hline 8a^3 - 12a^2 + 18a \\ + 12a^2 - 18a + 27. \\ \hline 8a^3 + 27. \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{l} 2a^2 + 3b^2 + 5c^2 - 4ab - 8ac - 2bc \\ \qquad\qquad 3a + 2b + 5c \\ \hline 6a^3 + 9ab^2 + 15ac^2 - 12a^2b - 24a^2c - 6abc \\ \qquad 4a^2b + 6b^3 + 10bc^2 - 8ab^2 - 16abc - 4b^2c \\ \qquad\qquad 10a^2c + 15b^2c + 25c^3 - 20abc - 40ac^2 - 10bc^2 \\ \hline 6a^2 + ab^2 - 25ac^2 - 8a^2b - 14a^2c - 42abc + 6b^3 + 11b^2c + 25c^3. \end{array}$$

**

III.

$$\begin{array}{l}
2a^2 - 3ab - 4b^2 \\
3a^2 - 2ab + b^2 \\
\hline
6a^4 - 9a^3b - 12a^2b^2 \\
\quad - 4a^3b + 6a^2b^2 + 8ab^3 \\
\qquad + 2a^2b^2 - 3ab^3 - 4b^4 \\
\hline
6a^4 - 13a^3b - 4a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4.
\end{array}$$

32. *Чтобъ раздѣлить составное количество на одночленное, должно на него дѣлить по порядку каждой членъ перваго по правиламъ одночленныхъ количествъ.* На примѣръ:

$$\begin{array}{l|l}
8a^5b - 12a^6b^2 + 4a^3b^3 - 20a^4b^5 & 4a^3b \\
\cline{2-2}
-8a^5b & 2a^2 - 3a^3b + b^2 - 5ab^4 \\
\cline{1-1}
\quad -12a^6b^2 & \\
\quad +12a^6b^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad +4a^3b^3 & \\
\qquad -4a^3b^3 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad -20a^4b^5 & \\
\qquad\quad +20a^4b^5 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad \text{〃 〃 〃} &
\end{array}$$

33. *Чтобъ раздѣлить составное количество на составное, надлежитъ сперва ихъ расположить по общей буквѣ, то есть: первымъ членомъ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ поставить общую букву возведенную въ*

самаго большаго показателя, вторымъ ту же букву, возведенную въ слѣдующаго меньшаго показателя, и такъ далѣе. Потомъ дѣлить первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя, частное ихъ будетъ первой членъ частнаго искомаго; наконецъ на сей членъ множить всѣ члены дѣлителя и произведенїе вычесть изъ дѣлимаго; ежели будетъ остатокъ, то первой его членъ дѣлить опять на первой членъ дѣлителя; частное ихъ будетъ второй членъ искомаго частнаго; помножить на него всѣ члены дѣлителя и произведенїе вычесть изъ остатка. Естьли произойдетъ новой остатокъ, то съ нимъ поступать по прежнему; дѣйствїежъ продолжать до тѣхъ поръ пока небудетъ остатка. На примѣръ:

Раздѣлить $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - c^4$ на $a^2 + b^2 + c^2$?

$$\begin{array}{rl|l}
\text{Дѣлимое} & a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - c^4 & a^2 + b^2 + c^2 \ \text{дѣлитель} \\
\cline{3-3}
& -a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 & a^2 + b^2 - c^2 \ \text{частное.} \\
\cline{2-2}
& \quad a^2b^2 - a^2c^2 + b^4 - c & \\
& \quad -a^2b^2 - b^4 - b^2c^2 & \\
\cline{2-2}
& \qquad -a^2c^2 - b^2c^2 - c^4 & \\
& \qquad +a^2c^2 + b^2c^2 + c & \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

34. Вотъ еще для упражненія нѣсколько примѣровъ :

I.

$$\begin{array}{l} 18a^2 - 8b^2 \\ -18a^2 + 12ab \\ \hline +12ab - 8b^2 \\ -12ab + 8b^2 \\ \hline \quad '' \quad '' \quad '' \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3a - 2b \\ \hline 6a + 4b \end{array} \right.$$

II.

$$\begin{array}{l} 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 \\ -1 + 2x - x^2 \\ \hline -3x + 9x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 \\ +3x - 6x^2 + 3x^3 \\ \hline 3x^2 - 7x^3 + 5x^4 - x^5 \\ -3x^2 + 6x^3 - 3x^4 \\ \hline -x^3 + 2x^4 - x^5 \\ +x^3 - 2x^4 + x^5 \\ \hline \quad '' \quad '' \quad '' \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2x + x^2 \\ \hline 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \end{array} \right.$$

III.

$$\begin{array}{l} a^5 - b^5 \\ -a^5 + a^4b \\ \hline +a^4b - b^5 \\ -a^4b + a^3b^2 \\ \hline +a^3b^2 - b^5 \\ -a^3b^2 + a^2b^3 \\ \hline +a^2b^3 - b^5 \\ -a^2b^3 + ab^4 \\ \hline +ab^4 - b^5 \\ -ab^4 + b^5 \\ \hline \quad '' \quad '' \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a - b \\ \hline a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \end{array} \right.$$

IV.

$$\begin{array}{l} a^3 + b^2 \\ -a^3 - a^2b \\ \hline -a^2b + b^3 \\ +a^2b + ab^2 \\ \hline +ab^2 + b^3 \\ -ab^2 - b^3 \\ \hline \quad '' \quad '' \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a + b \\ \hline a^2 - ab + b^2 \end{array} \right.$$

V.

$$\begin{array}{l} a^4 - b^4 \\ -a^4 - a^3b \\ \hline -a^3b - b^4 \\ +a^3b + a^2b^2 \\ \hline +a^2b^2 - b^4 \\ -a^2b^2 - ab^3 \\ \hline -ab^3 - b^4 \\ +ab^3 + b^4 \\ \hline \quad '' \quad '' \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a + b \\ \hline a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 \end{array} \right.$$

35. Чтобъ узнать вѣрно ли сдѣлано дѣленіе, должно дѣлителя помножить на частное и когда произведеніе будетъ равно дѣлимому, то дѣленіе сдѣлано вѣрно. Естьли кто пожелаетъ узнать точное ли получено произведеніе, то для сего должно произведеніе раздѣлить на множителя, въ частномъ выйти должно множимое.

ГЛАВА IV.

Объ общемъ большомъ дѣлителѣ.

36. *Общимъ большимъ дѣлителемъ* количествъ называется такое большое количество, на которое онѣ могутъ быть раздѣлены безъ остатка.

37. *Естьли два количества неимѣютъ общихъ буквъ, то онѣ не имѣютъ общаго дѣлителя.*

38. *Всякой точной дѣлитель какого нибудь количества есть также точной дѣлитель количества онаго, помноженнаго на какое нибудь другое количество* На пр. естьли d содержится 4 раза въ b, то оно будетъ содержаться 4a разъ въ ab.

39. *Точной дѣлитель частей цѣлаго есть точной дѣлитель цѣлаго.* Ибо естьли $b+c=a$ и d точно содержится въ b и c, то очевидно оно также точно содержится въ a.

40. *Точной дѣлитель цѣлаго и одной изъ его частей, есть также точной дѣлитель другой его части.* Въ самомъ дѣлѣ естьли $a=b+c$ и d точно содержится въ a и b, то оно должно также содержаться и въ c; въ противномъ случаѣ немоглобъ оно содержаться въ a.

4 . *Естьли два количества A и B дѣлятся на третіе D, то и остатокъ ихъ c дѣлится точно на D*; такъ на примѣръ: пусть будетъ

$A>B$, и именно $A=Bf+c$: говорю c дѣлится на d; ибо A и $Bf+c$ дѣлятся на D, B также, а слѣдовательно и Bf. И такъ c должно дѣлиться на d. —

42. *Найти общаго большаго дѣлителя количествъ a и b, изъ которыхъ $a>b$?*

Дѣлю a на b, называю частное m, остатокъ c, будетъ

$$a=bm+c$$

Дѣлю b на c, называю частное n, остатокъ d, будетъ

$$b=cn+d$$

Дѣлю c на d, называю частное f, и пусть остатка не находится никакого; то будетъ

$$c=df$$

Понеже говорю d есть точной дѣлитель d и df или c, онъ есть также дѣлитель cn и b; а слѣдовательно bm и a; и такъ d есть общій дѣлитель a и b.

Говорю теперь что d есть общій большой дѣлитель a и b. Ибо когда a и b дѣлятся на d, то и остатокъ ихъ c долженъ дѣлиться на d. По той же причинѣ остатокъ d количествъ b и c долженъ дѣлиться на d; но d ни на какое количество, больше самаго себя, на цѣло дѣлиться не можетъ. И такъ d есть общій большой дѣлитель количествъ a и b.

И такъ способъ находить общаго большаго дѣлителя алгебраическихъ количествъ сходенъ со способомъ, предложеннымъ для чиселъ. *Надлежитъ, расположа оба количества по одной буквѣ, дѣлить количество, въ которомъ буква сія имѣетъ большаго показателя, на количество, въ коемъ та буква съ меньшимъ показателемъ*, и продолжать до тѣхъ поръ, пока показатель въ остаткѣ перваго количества сдѣлается менѣе показателя втораго. Тогда должно дѣлить второе количество на первой остатокъ; потомъ первой остатокъ на второй; и такъ далѣе, пока не произойдетъ остатка; тогда послѣдній дѣлитель будетъ общій большой дѣлитель.

43. Прежде чѣмъ пояснимъ правило сіе примѣромъ сдѣлаемъ замѣчаніе, которое облегчитъ намъ его употребленіе. Замѣчаніе сіе состоитъ въ томъ, что общій большой дѣлитель двухъ количествъ неперемѣнится, когда одно изъ оныхъ количествъ помножится или раздѣлится на такое количество, которое неслужитъ дѣлителемъ или множителемъ другому, и также, не имѣетъ съ нимъ общаго дѣлителя. На примѣръ количествъ ab и ac общій дѣлитель есть a, то естьли помножу ab на d, произойдетъ abd, котораго какъ и ac общій дѣлитель a; но онъ не будетъ тотъ же, естьли бы ab помножили на c, тогда произошло бы abc, и общій дѣлитель abc и ac былъ бы ac; равномѣрно естьли бы помножили ab на cd, тогда количествъ abcd и ac общій дѣлитель былъ бы ac.

И такъ отсюда заключимъ: 1е. *Что естьли, искавши общаго большаго дѣлителя двухъ количествъ, замѣтили бы въ продолженіи дѣленій, что дѣлимое или дѣлитель имѣетъ факторомъ или дѣлителемъ такое количество, которое неслужитъ факторомъ другому, то можно его уничтожить.*

2е. *Можно помножить одно изъ двухъ количествъ на всякое произвольное количество, лишъ бы оно не было дѣлителемъ другаго и не имѣло бы съ нимъ общаго фактора.*

44. Теперь пояснимъ правило и замѣчаніе примѣромъ:

Положимъ что требуется сыскать общаго большаго дѣлителя $a^2-3ab+2b^2$ и $a^2-ab-2b^2$. Дѣлю первое на второе, получаю въ частномъ 1, а въ остаткѣ $-2ab+4b^2$.

$$\begin{array}{r|l} a^2-3ab+2b^2 & a^2-ab-2b^2 \\ -a^2+ab+2b^2 & 1 \\ \hline -2ab+4b^2 & \end{array}$$

Теперь надлежало бы дѣлить $a^2-ab-2b^2$ на $-2ab+4b^2$, но такъ какъ послѣдняго количества факторъ $2b$ неслужитъ факторомъ новому дѣлимому, то на него дѣлю $-2ab+4b^2$ и ищу общаго дѣлителя количествъ $a^2-ab-2b^2$ и $-a+2b$, то есть дѣлю $a^2-ab-2b^2$ на $-a+2b$.

$$\begin{array}{l|l} a^2-ab-2b^2 & -a+2b \\ \underline{-a^2+2ab} & -a-b \\ \quad ab-2b^2 & \\ \quad \underline{-ab+2b^2} & \\ \quad\ \ {''}\quad {''} & \end{array}$$

Такъ какъ остатка нѣтъ, то и заключаю, что $-a+2b$ есть искомой большой дѣлитель данныхъ количествъ.

45. Чтобъ сыскать общаго большаго дѣлителя многихъ количествъ, надлежитъ сперва сыскать его для каждыхъ двухъ; потомъ найти общаго большаго дѣлителя каждыхъ двухъ прежнихъ общихъ дѣлителей, и такъ далѣе; наконецъ найденный общій большой дѣлитель послѣднихъ двухъ общихъ большихъ дѣлителей, будетъ искомой дѣлитель данныхъ количествъ.

Найти общаго большаго дѣлителя количествъ:

$$2a^2-2b^2,\ 2a^3-2b^3,\ a^4-b^4,\ a^5-b^5\ ?$$

Сперва ищу общаго дѣлителя $2a^2-2b^2$ и $2a^3-2b^3$, нахожу $2a-2b$

$$\begin{array}{l|l} 2a^3-2b^3 & 2a^2-2b^2 \\ \underline{-2a^3+2ab^2} & a \\ \quad 2ab^2-2b^3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2a^2-2b^2 & 2a-2b \\ \underline{-2a^2+2ab} & a+b \\ \quad +2ab-2b^2 & \\ \quad \underline{-2ab+2b^2} & \\ \quad\ \ {''}\quad {''} & \end{array}$$

Потомъ ищу большаго общаго дѣлителя количествъ a^4-b^4, a^5-b^5, и нахожу $a-b$.

$$\begin{array}{l|l} a^5-b^5 & a^4-b^4 \\ \underline{-a^5+ab^4} & a \\ \quad ab^4-b^5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} a^4-b^4 & a-b \\ \underline{-a^4+a^3b} & a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ \quad +a^3b-b^4 & \\ \quad \underline{-a^3b+a^2b^2} & \\ \qquad a^2b^2-b^4 & \\ \qquad \underline{-a^2b^2+ab^3} & \\ \qquad\quad +ab^3-b^4 & \\ \qquad\quad \underline{-ab^3+b^4} & \end{array}$$

Наконецъ ищу большаго дѣлителя $2a-2b$ и $a-b$; нахожу что онъ есть $a-b$.

$$\begin{array}{l|l} 2a-2b & a-b \\ \underline{-2a+2b} & 2 \end{array}$$

И такъ $a-b$ есть искомой общій большой дѣлитель.

ГЛАВА V.

О дробяхъ и смѣшенныхъ количествахъ.

46. *Дробь* есть собраніе частей количества принятаго за единицу.

Дробь изображается двумя количествами, отдѣленныхъ между собою чертою, изъ которыхъ нижнее называется *знаменателемъ* и показываетъ на сколько частей количество цѣлое раздѣлено, верхнееж количество называется *числителемъ* и означаетъ сколько таковыхъ частей взято. Такимъ образомъ дробь, показывающая что взято a частей количества раздѣленнаго на b таковыхъ, означается $\frac{a}{b}$. Также выраженіе $\frac{e}{m}$ показываетъ, что количество взятое за единицу, раздѣлено на m частей и таковыхъ взято e. Числитель и знаменатель вмѣстѣ общимъ именемъ называются *двумя членами дроби*.

47. Мы еще въ Ариѳметикѣ видѣли, что *дробь есть часть цѣлаго количества, соотвѣтствующаго числителю;* то слѣдуетъ, что *дробь есть частное число*, и что *числитель есть дѣлимое, а знаменатель есть дѣлитель.*

48. И такъ когда дѣлится одно цѣлое количество на другое и происходитъ остатокъ, то его можно въ частномъ изобразить дробью, подписавъ подъ онымъ остаткомъ дѣлителя, и присоединивъ къ цѣлому частному.

49. Всякое количество цѣлое можетъ быть изображено дробью, подписавъ подъ нимъ вмѣсто знаменателя единицу.

50. Когда помножимъ числителя дроби на какое нибудь количество, то отъ сего дробь увеличится во столько разъ, во сколько количество больше единицы.

Напротивъ когда помножимъ знаменателя, то отъ сего дробь уменьшится во столько разъ, во сколько количество то больше единицы.

И такъ изъ сего слѣдуетъ что *дробь не перемѣнится когда оба ея члена помножатся на одно количество.*

51. На семъ основывается *приведеніе дробей къ одинакому знаменателю. Для сего должно помножить оба члена каждой дроби на произведеніе прочихъ знаменателей.*

Въ самомъ дѣлѣ величина каждой дроби отъ сего неперемѣнится, потому что оба ея члена множатся на одно количество; но знаменатель у нихъ будетъ одинакой, ибо онъ есть у нихъ произведеніе всѣхъ знаменателей. Чтобъ привесть дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, къ одинакому знаменателю, для сего множу оба члена дроби $\frac{a}{b}$ на df, члены дроби $\frac{c}{d}$ на bf, члены дроби $\frac{e}{f}$ на bd и получаю новыя дроби $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$ равныя первымъ и имѣющія одинакого знаменателя.

Такимъ же образомъ дроби $\frac{a-b}{c}$, $\frac{m}{d-g}$, приведя къ одинакому знаменателю получимъ $\frac{ad-bd-ag+bg}{cd-cg}$, $\frac{cm}{cd-cg}$.

52. *Чтобъ привесть количество a къ знаменателю b, надлежитъ его помножить и раздѣлить на оное*, то есть будетъ $\frac{ab}{b}$.

53. Когда раздѣлится числитель дроби на какое нибудь количество, то отъ сего дробь во столько разъ уменьшится, во сколько разъ количество то больше единицы.

Напротивъ когда раздѣлится знаменатель, то дробь отъ сего во столько разъ увеличится, во сколько разъ количество то больше единицы.

И такъ изъ сего слѣдуетъ что *дробь неперемѣнится когда оба ея члена раздѣлятся на одно количество.*

54. На семъ основывается *сокращеніе дробей. Для сего должно раздѣлить оба члена дроби на общаго ихъ большаго дѣлителя.* Въ самомъ дѣлѣ отъ сего дробь не перемѣнится, потому что оба ея члена раздѣлятся на одно количество; но выраженіе ея будетъ простѣе. — Такимъ образомъ, чтобъ сократить дробь $\frac{aac}{abc}$, дѣлю оба ея члена на общаго дѣлителя ac и получаю ей равную $\frac{a}{b}$.

Чтобъ сократить дробь $\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2b}$, сперва ищу обоихъ ея членовъ общаго большаго дѣлителя,

которой будетъ $3a^2$, потомъ дѣлю на него оба сіи члена, и получаю новую дробь $\frac{2a+b}{4a+3c}$ равную прежней.

55. *Чтобъ сложить вмѣстѣ нѣсколько дробей, должно сперва ихъ привесть къ одинакому знаменателю, потомъ числителей сихъ новыхъ дробей сложить вмѣстѣ и подписать подъ суммою ихъ общаго знаменателя.* Ибо складывать можно токмо одинакія части, и сумма ихъ должна быть тогожъ рода. Такимъ образомъ сумма дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ будетъ $\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$.

56. *Чтобъ вычесть одну дробь изъ другой, должно сперва ихъ привесть къ одинакому знаменателю, потомъ вычесть числителя вычитаемой дроби изъ числителя уменьшаемой, и подъ разностію подписать общаго знаменателя.* Ибо вычитаніе можно произвесть только надъ однородными частями, и разность должна быть съ ними тогожъ рода; такимъ образомъ разность дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{-c}{d}$ будетъ $\frac{ad+bc}{bd}$.

57. *Чтобъ умножить дробь на цѣлое количество, должно на него помножить числителя оной.* Такимъ образомъ $\frac{a}{b} \times d = \frac{ad}{b}$; ибо помножить дробь $\frac{a}{b}$ на d значитъ найти такое третіе количество, котороебъ содержало въ себѣ оную столько разъ, сколько d единицу; но d содержитъ единицу d разъ, и $\frac{ad}{b}$ содержитъ дробь $\frac{a}{b}$ также d разъ. Слѣдовательно $\frac{a}{b} \times d = \frac{ad}{b}$.

58. *Чтобъ умножить цѣлое количество на дробь, должно его помножить сперва на числителя, а потомъ раздѣлить на знаменателя.* Такимъ образомъ $m \times \frac{y}{g} = \frac{my}{g}$; ибо въ $\frac{my}{g}$ столько разъ m содержится, сколько единица въ $\frac{y}{g}$.

59. *Чтобъ умножить дробь на дробь, должно помножить числителя на числителя, а знаменателя на знаменателя.* Такимъ образомъ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Ибо помножа $\frac{a}{b}$ на c получимъ $\frac{ac}{b}$, но сіе выраженіе больше настоящаго въ d разъ, потому что $\frac{a}{b}$ должно помножить на $\frac{c}{d}$, а не на c; слѣдовательно выраженіе $\frac{ac}{b}$ должно уменьшить въ d разъ, то есть должно знаменателя b пожножить на d. И такъ получимъ $\frac{ac}{bd}$.

60. *Чтобъ раздѣлить дробь на цѣлое количество, должно помножить на него знаменателя той дроби.* Такимъ образомъ $\frac{a}{b} : d = \frac{a}{bd}$. Ибо умножить $\frac{a}{b}$, на d значитъ найти такое третіе количество, которое столько бы разъ содержало въ себѣ $\frac{a}{b}$ сколько 1 въ d; но раздѣлить $\frac{a}{b}$ на d значитъ найти такое третіе количество, которое бы содержало въ себѣ столько разъ 1, сколько d въ $\frac{a}{b}$ содержится. И такъ дѣленіе есть противное дѣйствіе умноженію; слѣдовательно въ немъ должно поступать на противъ. И такъ $\frac{a}{b} : d = \frac{a}{bd}$.

61. *Чтобъ раздѣлить цѣлое количество на дробь, должно помножить его на ея знаменателя и раздѣлить на числителя.* $a : \frac{e}{f} = \frac{af}{e}$. Ибо раздѣля a на e будетъ $\frac{a}{e}$, но должно a раздѣлить не на e, а на $\frac{e}{f}$; и такъ мы сыскали количество $\frac{a}{e}$ меньше настоящаго въ f разъ; слѣдовательно его должно увеличить въ f разъ, то есть помножить на f. И такъ $a : \frac{e}{f} = \frac{af}{e}$.

62. *Чтобъ раздѣлить дробь на дробь, должно помножить числителя дѣлимой дроби на знаменателя дѣлящей, а знаменателя дѣлимой на числителя дѣлящей.* Такимъ образомъ, чтобъ раздѣлить $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$, должно помножить a на d, и b на c, то есть $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. Ибо раздѣливши сперва $\frac{a}{b}$ на c получимъ $\frac{a}{bc}$, но сіе количество меньше настоящаго въ d разъ, потому что $\frac{a}{b}$ должно раздѣлить не на c, но на $\frac{c}{d}$; слѣдовательно $\frac{a}{bc}$ должно помножить на d. И такъ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

63. *Смѣшенное количество* есть выраженіе, изображающее сумму цѣлаго количества съ дробью. Такимъ образомъ $a + \frac{b}{c}$ есть количество смѣшенное.

64. *Чтобъ изобразить смѣшенное количество $a + \frac{b}{c}$ въ видѣ дроби, должно помножить цѣлое количество a на знаменателя дроби c, къ произведенію приложить числителя b, и подъ суммою подписать знаменателя c;* то есть $a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$. Ибо $a = \frac{ac}{c}$; слѣдовательно $a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$; по той же причинѣ $a^2 + \frac{2n}{b-c} = \frac{a^2b - a^2c + 2n}{b-c}$.

65. *Напротивъ, чтобъ исключить цѣлое количество изъ дроби, надлежитъ числителя оной раздѣлить на знаменателя. Такимъ образомъ, чтобъ изъ дроби* $\frac{3ab + ac + cd}{a}$ исключить цѣлое количество, дѣлю $3ab + ac + cd$ на a и получаю $3b + c + \frac{cd}{a}$. Ибо $\frac{3ab + ac + cd}{a} = \frac{3ab}{a} + \frac{ac}{a} + \frac{cd}{a} = 3b + c + \frac{cd}{a}$. По той же причинѣ $\frac{a^2 + 4ab + 4b^2 + c^2}{a + 2b} = a + 2b + \frac{c^2}{a + 2b}$.

66. *Чтобъ сложить, вычесть, умножить и раздѣлить смѣшенныя количества, то для сего надлежитъ ихъ сперва изобразить дробьми, и потомъ уже надъ сими послѣдними производить оныя дѣйствія.*

Такимъ образомъ:

1. $\left(a + \frac{c}{d}\right) + \left(m + \frac{n}{q}\right) = \left(\frac{ad + c}{d}\right) + \left(\frac{mq + n}{q}\right) = \frac{adq + cq + mdq + dn}{dq}$.

2. $\left(a + \frac{b}{c}\right) - \left(e + \frac{f}{g}\right) = \left(\frac{ac + b}{c}\right) - \left(\frac{eg + f}{g}\right) = \frac{acg + bg - ceg - cf}{cg}$.

3. $\left(m + \frac{x}{y}\right) \times \left(n - \frac{p}{q}\right) = \left(\frac{my + x}{y}\right) \times \left(\frac{nq - p}{q}\right) = \frac{mnqy + nqx - mpy - px}{qy}$.

4. $\left(a + \frac{b}{d}\right) : \left(m + \frac{n}{o}\right) = \left(\frac{ad + b}{d}\right) : \left(\frac{mo + n}{o}\right) = \frac{ado + bo}{mod + nd}$.

ГЛАВА VI.

О непрерывныхъ дробяхъ.

67. Дробь, у которой знаменатель есть смѣшенное количество, котораго дроби знаменатель также есть смѣшенное количество, и такъ далѣе, называется *непрерывною*; такимъ образомъ выраженіе:

$$\cfrac{a'}{a + \cfrac{b'}{b + \cfrac{c'}{c + \cfrac{d'}{d + \cfrac{e'}{e + \text{и проч.}}}}}}$$

есть непрерывная дробь.

Дроби $\frac{a'}{a}$, $\frac{b'}{b}$, $\frac{c'}{c}$ и проч. называются *составляющими*. Число составляющихъ дробей есть опредѣленное, то есть ограниченное, и неопредѣленное, то есть безконечное.

68. Естьли числители a′, b′, c′, и проч. равны единицѣ, то дробь изобразится такъ:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{и проч.}}}}}}$$

69. Чтобъ привесть непрерывную дробь

$$\cfrac{a'}{a+\cfrac{b'}{b+\cfrac{c'}{c+\cfrac{d'}{d}}}}$$

въ обыкновенную поступаю, начиная отъ правой руки къ лѣвой, слѣдующимъ образомъ:

1e. Собранїе $\cfrac{c'}{c+\cfrac{d'}{d}}$ послѣднихъ двухъ составляющихъ дробей есть дробь, которой числитель c', а знаменатель $c+\frac{d'}{d}$ или $\frac{cd+d'}{d}$, слѣдовательно $\cfrac{c'}{c+\cfrac{d'}{d}} = \cfrac{c'}{\cfrac{cd+d'}{d}} = \frac{c'd}{cd+d'}$; и такъ данная непрерывная дробь превратится въ

$$\cfrac{a'}{a+\cfrac{b'}{b+\cfrac{c'd}{cd+d'}}}.$$

Поступая попрежнему, найду $\cfrac{b'}{b+\cfrac{c'd}{cd+d'}} = \frac{b'cd+b'd'}{bcd+bd'+c'd}$, и слѣдовательно непрерывная дробь приметъ видъ:

$$\cfrac{a'}{a+\cfrac{b'cd+b'd'}{bcd+bd'+c'd}}$$

Наконецъ, по руководству тогожъ способа, получу что она равна обыкновенной дроби

$$\frac{a'bcd+a'bd'+a'c'd}{abcd+abd'+ac'd+b'cd+b'd'}$$

70. Естьли назовемъ S сумму всѣхъ членовъ непрерывной дроби

$$\cfrac{a'}{a+\cfrac{b'}{b+\cfrac{c'}{c+\cfrac{d'}{d+\text{и проч.}}}}}$$

и естьли, начиная отъ лѣвой руки къ правой, возьмемъ сперва одну первую составляющую дробь, потомъ двѣ первыя, послѣ три, и такъ далѣе; то попеременно произойдутъ количества больше и меньше S, то есть будетъ:

$$S<\frac{a'}{a},\quad S>\cfrac{a'}{a+\cfrac{b'}{b}},\quad S<\cfrac{a'}{a+\cfrac{b'}{b+\cfrac{c'}{c}}},\ \text{и проч.}$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ первомъ выраженїи $\frac{a'}{a}$ знаменатель a меньше настоящаго, понеже сей послѣднїй состоитъ изъ совокупленїя a со всѣми дробьми, слѣдующими къ правой рукѣ; и такъ $S<\frac{a'}{a}$.

Во второмъ выраженіи $\frac{a'}{a+\frac{b'}{b}}$ знаменатель b очевидно меньше настоящаго. И такъ дробь $\frac{b'}{b}$ больше надлежащей, и слѣдовательно $a+\frac{b'}{b}$, знаменатель количества a' больше истиннаго. И такъ $S > \frac{a'}{a+\frac{b'}{b}}$.

Подобнымъ образомъ, разсуждая о прочихъ выраженіяхъ увѣримся въ точности предложенія.

71. Для превращенія обыкновенной дроби $\frac{A}{B}$, которой числитель A меньше знаменателя B, въ непрерывную, дѣлю оба ея члена на A, отъ сего произойдетъ $\frac{1}{\frac{B}{A}}$. Предположивши, что по раздѣленіи B на A частное будетъ a и остатокъ a', то получимъ $\frac{A}{B}=\frac{1}{a+\frac{a'}{A}}$. Раздѣливши на a' оба члена дроби $\frac{a'}{A}$, и означивши частное чрезъ b а остатокъ b' будетъ

$$\frac{A}{B}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{b'}{a'}}}.$$

Продолжая такимъ образомъ произойдетъ

$$\frac{A}{B}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{и проч.}}}}}}$$

72. Обыкновенныя числовыя дроби помощію непрерывныхъ приводятся въ простѣйшее выраженіе.

Пусть на примѣръ будетъ дробь $\frac{10000000000}{31415926535}$, которой числитель изображаетъ діаметръ круга, а знаменатель окружность. Дробь сія по предыдущему члену даетъ

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{и проч.}}}}}}}$$

Взявши первой только членъ, получимъ первую приближенную величину данной дроби, но только больше ея. Взявши же сряду два первые члена, будемъ имѣть вторую приближенную величину $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ или $\frac{7}{22}$, которая будетъ меньше данной дроби. Продолжая такимъ образомъ сыщемъ величины поперемѣнно больше и меньше данной дроби, но та изъ нихъ тѣмъ ближе къ истинной величинѣ подходить будетъ, чѣмъ больше взято для составленія составляющихъ дробей.

Въ разсужденіи непрерывныхъ дробей смотри Алгебры *Сюзанна* задачи: XVIII, XIX, XX, XXI, XXII, стр. 74 — 76. Также въ Алгебрѣ *Лакруа* и въ сочиненіяхъ знаменитаго *Лагранжа*.

ГЛАВА VII.

О разложеніи дробей въ ряды.

73. Разсматривая дѣленіе количествъ мы видѣли, какимъ образомъ находить частное, когда оно представляетъ фактора дѣлимаго; но не всегда частное можетъ быть факторомъ дѣлимаго: въ семъ случаѣ частное будетъ состоять изъ непрерывнаго ряда дробей, получаемыхъ по предложеннымъ правиламъ чрезъ раздѣленіе перваго члена остатка на первой членъ дѣлителя. Въ дробяхъ правильныхъ и нѣкоторыхъ неправильныхъ, числитель не есть факторъ знаменателя: способъ дѣлить числителя на знаменателя называется *разложеніемъ дроби въ непрерывной рядъ.*

74. *Разложить дробь* $\frac{c}{a+b}$ *въ непрерывной рядъ?* Для сего дѣлю, по правиламъ дѣленія,

c на $a + b$ и нахожу что, вмѣсто $\frac{c}{a+b}$ можно принять величины $\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2}$, $\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3}$, $\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}$, и многія другія, естьли мы захотимъ продолжать дѣленіе.

$$\begin{array}{l}
c \qquad \left\{ \begin{array}{l} a+b \\ \hline \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^4} \end{array} \right. \\
-c-\dfrac{bc}{a} \\ \hline
\quad -\dfrac{bc}{a} \\
+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{b^2c}{a^2} \\ \hline
\qquad +\dfrac{b^2c}{a^2} \\
\qquad -\dfrac{b^2c}{a^2}-\dfrac{b^3c}{a^3} \\ \hline
\qquad\qquad -\dfrac{b^3c}{a^3} \text{ и проч.}
\end{array}$$

75. Теперь посмотримъ, разлагая дробь въ непрерывной рядъ, когда мы можемъ подходить къ дѣйствительной величинѣ и когда удалятся. Для сего разложимъ въ рядъ дробь $\frac{1}{1+a}$.

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1 + a \\
\cline{2-2}
-1 - a & 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \text{и проч.} \\
\hline
\quad - a & \\
\quad + a + a^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad + a^2 & \\
\qquad - a^2 - a^3 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad - a^3 & \\
\qquad\quad + a^3 + a^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad + a^4 & \\
\qquad\qquad - a^4 - a^5 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad - a^5 & \\
\qquad\qquad\quad + a^5 + a^6 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad + a^6 &
\end{array}
$$

Здѣсь вмѣсто $\frac{1}{1+a}$ можно взять различныя выраженія, но чтобъ имѣть точную величину, то всегда должно прибавлять остатокъ. Однако когда члены дѣлителя будутъ уменьшатся, такъ какъ и самыя слѣдовательно остатки, то тогда конечно мы можемъ къ частному и не прибавлять остатка, но при всемъ томъ чтобъ имѣть ближайшую величину къ истинной, должно брать какъ можно больше членовъ.

На примѣръ пусть будетъ $a = \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{1+a} = \frac{2}{3}$; слѣдовательно $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} +$ и проч., бравши изъ сего ряда различное число членовъ, мы получимъ различныя величины, изъ которыхъ та ближе будетъ подходить къ на-

стоящей, для составленія коей больше взято будетъ членовъ; но при всемъ томъ ни одна изъ сихъ величинъ точно $\frac{2}{3}$ равна не будетъ.

Когда члены дѣлителя будутъ увеличиватся, а слѣдовательно и остатки, тогда мы чемъ больше возьмемъ членовъ безъ прибавленія остатка, тѣмъ дальше отойдемъ отъ истинной величины. Такъ на примѣръ естьли мы положимъ $a = 2$, то будетъ $\frac{1}{1+a} = \frac{1}{3}$, и слѣдовательно $\frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 +$ и проч. очевидно что чѣмъ больше въ семъ ряду возьмемъ членовъ для составленія величины, тѣмъ оная дальше будетъ отходить отъ $\frac{1}{3}$.

Когда мы сдѣлаемъ $a = 1$, то будетъ $\frac{1}{1+a} = \frac{1}{2}$, и слѣдовательно $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ и проч. Рядъ сей намъ показываетъ, что ежели мы, неприбавляя остатка, возьмемъ четное число членовъ, то получимъ 0; естьли же нечетное, то произойдетъ 1. И такъ рядъ сей намъ не можетъ дать ни приближающейся, ни удаляющейся величины.

ГЛАВА VIII.

О составленіи квадратовъ и извлеченіи квадратныхъ корней.

76. Произведеніе количества самаго на себя называется *квадратомъ* или *второю степенью*

того количества; такимъ образомъ 100 или 10×10 есть квадратъ или вторая степень 10, a^2 или aa есть квадратъ a; количества же 10 и a суть квадратныя корни или *первыя степени*.

Слово квадратъ дано Геометрами потому, что для опредѣленія площади квадрата надобно множить самаго на себя его бокъ, или количество величину онаго бока изображающее; слово же вторая степень произходитъ отъ того, что количество находится тутъ два раза факторомъ.

77. Квадратъ количества изображается показателемъ 2, а производится помноженіемъ самаго на себя; такимъ образомъ:

Квадратъ $10 = (10)^2 = 10^2 = 10 \times 10 = 100.$
—— $+a = (+a)^2 = a^2 = a \times a = aa.$
—— $-a = (-a)^2 = a^2 = -a \times -a = a^2.$
—— $25 = (25)^2 = 25 \times 25 = 625.$

Квадратъ $(a+b) = (a+b)^2 = (a+b) \times (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$; то есть *квадратъ суммы двухъ количествъ равенъ квадрату перваго члена, сложенному съ двойнымъ произведеніемъ перваго на второй, и квадратомъ втораго члена* (1).

Квадратъ $(a-b) = (a-b)^2 = (a-b) \times (a-b) = a^2 - 2ab + b^2$, то есть *квадратъ разности двухъ количествъ равенъ квадрату перваго члена безъ двойнаго произведенія перваго на второй, сложенному съ квадратомъ втораго члена* (2).

Квадратъ $(a+b+c) = (a+b+c)^2 = (a+b+c) \times (a+b+c) = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2.$

—— $\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2^2}{3^2} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$

—— $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}.$

—— $\frac{12}{15} = \left(\frac{12}{15}\right)^2 = \frac{12^2}{15^2} = \frac{144}{225}.$

—— $\frac{a+b}{c-d} = \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{(c-d)^2} = \left(\frac{a+b}{c-d}\right) \times \left(\frac{a+b}{c-d}\right) = \frac{a^2+2ab+b^2}{c^2-2cd+d^2}.$

—— $0,25 = (0,25)^2 = 0,25 \times 0,25 = 0,0625.$

—— $21,043 = (21,043)^2 = 21,043 \times 21,043 = 442,807849.$

Сіи два послѣдніе примѣра показываютъ, что въ квадратѣ десятичной дроби, вдвое больше заключается десятичныхъ цыфръ.

78. Квадраты чиселъ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Суть: 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100.

79. *Квадратъ числа, состоящаго изъ десятковъ и единицъ, состоитъ изъ квадрата десятковъ, удвоеннаго произведенія десятковъ на единицы и квадрата единицъ, то есть:*

$$\begin{array}{r} (24)^2 = 20^2 = 400 \\ + 2 \times 20 \times 4 = 160 \\ + 4^2 = 16 \\ \hline 576. \end{array}$$

Ибо всякое число состоящее изъ десятковъ и единицъ можетъ быть разбито на два числа, изъ коихъ одно представляетъ десятки, а другое единицы; такимъ образомъ: $24 = 20 + 4$, слѣдовательно $(24)^2 = (20+4)^2$ Но изобразя 20 буквою a, 4 же буквою b будетъ $(20+4)^2 = (a+b)^2$, но $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; и такъ $(20+4)^2$ или $(24)^2 = (20)^2 + 2 \times 20 \times 4 + 4^2 = 576$.

80. Составить изъ числа 125 квадратъ?

Говорю $125 = 120 + 5$ и $(125)^2 = (120+5)^2$; слѣдовательно $(125)^2$ или $(120+5)^2 = (120)^2 + 2 \times 120 \times 5 + 5^2$; но замѣтя, что $120 = 100 + 20$ и $(120)^2$ или $(100+20)^2 = (100)^2 + 2 \times 100 \times 20 + (20)^2$, будетъ $(125)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 20 + (20)^2 + 2 \times 120 \times 5 + 5^2 = 15625$. Иначе, $125 = 100 + 20 + 5$, назвавши: 100, 20, 5, буквами a, b, c, и замѣтя, что $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b) \times c + c^2$, будетъ $(125)^2 = (100+20+5)^2 = (100)^2 + 2 \times 100 \times 20 + (20)^2 + 2 \times 120 \times 5 + 5^2 = 15625$.

81. Составить квадратъ изъ числа 10203?

Говорю $10203 = 10000 + 200 + 3$, сдѣлавши $10000 = a$, $200 = b$, $3 = c$, и замѣтя, что $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b) \times c + c^2$, будетъ $(10203)^2 = (10000)^2 + 2 \times 1000 \times 200 + (200)^2 + 2 \times 10200 \times 3 + 3^2 = 104101209$.

Объ извлеченiи квадратныхъ корней изъ чиселъ.

82. Извлечь изъ какого нибудь даннаго числа *квадратный корень* значитъ найти такое число, которое будучи помножено само на себ-

произвело бы то данное число; такимъ образомъ: 3, 10, $\frac{2}{3}$, a, $\frac{a}{b}$, $a+b$ суть квадратные корни 9, 100, $\frac{4}{9}$, a^2, $\frac{a^2}{b^2}$, $a^2+2ab+b^2$. Въ самомъ дѣлѣ $3 \times 3 = 9$, $10 \times 10 = 100$, $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, $a \times a = a^2$, $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, $(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$. И такъ дѣйствiе извлеченiя квадратныхъ корней есть противное дѣйствiю составленiя квадратовъ. Квадратной корень означается знакомъ $\sqrt[2]{}$ или $\sqrt{}$; такимъ образомъ, чтобъ изобразить квадратной корень изъ количества a, пишутъ $\sqrt[2]{a}$ или $\sqrt{a}$, и произносятъ квадратной корень изъ a или просто корень изъ a; знакъ $\sqrt{}$ называется радикаломъ.

83. Извлечь квадратной корень изъ 576?

$$\begin{array}{r|l} 5{,}76 & 24 \text{ требуемой корень.} \\ -4 & \\ \hline 17{,}6 & 44. \\ 176 & \end{array}$$

Пишу 576 и провожу вертикальную линею по правую его сторону, такъ какъ въ дѣленiи, дѣлю число 576 на двѣ части запятою или линѣечкою, изъ коихъ въ первую заключаю двѣ цыфры 76 а во вторую 5; извлекаю изъ 4, которое число есть самой большой квадратъ первыхъ чиселъ заключающихся въ 5, квадратной корень 2. Пишу 2 по правую сторону 576 и получаю десятки искомаго корня; вычитаю 4 изъ 5 и возлѣ остатка 1 пишу первую часть 76; отдѣляю отъ 176 цыфру 6, означающую единицы, запятою. По правую сторону 176 пишу 4 цыфру, означающую двойные десятки корня; дѣлю 17 на 4, частное 4 пишу въ корнѣ и возлѣ 4; 44 множу на 4 и произведенїе 176 вычитаю изъ 176, въ остаткѣ нуль. Изъ чего заключаю, что 24 есть точной корень 576; заключенїе сїе повѣряется помноженїемъ числа 24 самаго на себя, которое производитъ 576.

Теперь посмотримъ на истинну нашего дѣлопроизводства. Говорю: такъ какъ данное количество 576 больше 100, то корень его долженъ быть больше 10; слѣдовательно онъ состоитъ изъ десятковъ и единицъ; и число 576 состоитъ изъ квадрата десятковъ, двойнаго произведенїя десятковъ на единицы, и квадрата единицъ. И такъ сперва въ числѣ 576 сыскиваю квадратъ десятковъ: для сего отдѣляю къ правой руки двѣ цыфры 76, и говорю что квадратъ десятковъ содержится въ 5; потому что квадраты, 1, 2, 3, и прочихъ десятковъ или 10, 20, 30, и проч. суть 1, 4, 9, сотней, или 100, 400, 900, единицъ; и такъ въ данномъ числѣ 576 квадратъ десятковъ содержится въ цыфрѣ сотенъ 5: по сей то причинѣ всегда отмѣчаются запятой къ правой рукѣ двѣ послѣднїя цыфры, какъ то здѣсь 76.

Самой большой квадратъ въ 5 заключающїйся есть 4, коего корень 2; и такъ 2 есть знакъ десятковъ корня числа 576: теперь вычтя 4 получаю число 176, содержащее двойное произведенїе десятковъ на единицы. Но чтобъ узнать единицы корня, отмѣчаю цыфру 6 запятою и дѣлю только 17 на двойные десятки: отмѣчаю цыфру

6, означающую единицы для того, что двойное произведенїе десятковъ на единицы не можетъ заключаться въ единицахъ; и потому надобно дѣлить 17 на 4, что даетъ въ частномъ число 4, которое есть единицы корня. Пишу 4 возлѣ корня десятковъ 2; но чтобъ узнать точно ли 4 есть единицы корня, пишу для сего сїе число 4 возлѣ числа 4, означающаго двойные десятки, чрезъ что 44 означаетъ двойные десятки сложенные съ единицами; и потому помножа 44 на 4 получаю 176, произведенїе двойныхъ десятковъ на единицы сложенное съ квадратомъ единицъ; вычитаю 176 изъ 176 и нахожу, что 24 есть точной корень числа 576.

84. Найти $\sqrt{5625}$?

56.25	75 требуемой корень.
49	
72,5	145
725	

Поступая подобно предыдущему найдемъ, что $\sqrt{5625} = 75$.

85. Извлечь $\sqrt{15625}$?

1,56,25	125 требуемой корень.
1	
5,6	22
44	
122,5	245
1225	

Дѣлю 15625 на части, считая отъ правой руки къ лѣвой такъ, чтобъ каждая изъ оныхъ частей заключала двѣ цыфры, кромѣ послѣдней къ лѣвой рукѣ, которая можетъ заключать и одну. Извлекаю изъ 1 квадратной корень 1. Пишу ее въ искомомъ корнѣ, а квадратъ единицы вычитаю изъ 1, въ остаткѣ нуль. Сношу слѣдующую часть 56, отмѣчаю 6 запятою и дѣлю 5 на 2, удвоенную единицу корня, частное 2 пишу какъ въ корнѣ подлѣ 1 такъ и подлѣ дѣлимаго съ правой стороны 2; множу 22 на частное 2 и произведеніе 44 вычитаю изъ 56, въ остаткѣ 12. Къ 12 сношу слѣдующую часть 25; отъ 1225 цыфру 5 отмѣчаю запятою и дѣлю 122 на 24, удвоенное число корня 12, въ частномъ получаю 5; пишу 5 въ корнѣ возлѣ 12 и подлѣ дѣлителя 24, множу 245 на 5 и произведеніе 1225 вычитаю изъ 1225, въ остаткѣ нуль. И такъ 125 есть точной искомой корень 15625.

Вотъ причина сего дѣлопроизводства: число 15625 будучи больше 100, корень его болѣе 10; слѣдовательно онъ состоитъ изъ десятковъ и единицъ, и 15625 заключаетъ въ себѣ квадратъ десятковъ, двойное произведеніе десятковъ на единицы и квадратъ единицъ; но, чтобъ получить квадратъ десятковъ, надобно откинуть цыфру 5, означающую единицы и цыфру 2, означающую десятки: вотъ первая часть 25. Слѣдовательно квадратъ сей содержится въ 156; но сіе число будучи больше 100, корень его больше 10, слѣдовательно онъ также состоитъ изъ десятковъ и единицъ. И такъ, чтобъ получить квадратъ сихъ новыхъ десятковъ, снова отмѣчаю цыфру 6, означающую единицы и цыфру 5, означающую десятки: вотъ вторая часть 56; показаннымъ способомъ

найдемъ, что корень наибольшаго квадрата заключающагося въ 156 есть 12. А чтобъ найти третью цыфру корня, то къ остатку 12, отъ вычитанія изъ 156 квадрата 12, присоединяю часть 25: отъ чего произойдетъ число 1225 заключающее въ себѣ двойное произведеніе десятковъ 12 на искомыя единицы и квадратъ сихъ послѣднихъ. Но такъ какъ двойное произведеніе десятковъ не можетъ заключатся въ 5 единицахъ, то по сему отмѣчаю цыфру 5 запятою и 122 дѣлю на 24, двойное произведеніе 12; въ частномъ получаю для корня единицъ цыфру 5, которую ставлю въ корнѣ возлѣ 12 и въ дѣлимомъ подлѣ 24. Потомъ множу число 245, означающее двойное произведеніе 2 десятковъ сложенное съ 5 единицами, на 5 и получаю 1225 двойное произведеніе десятковъ на единицы сложенное съ квадратомъ единицъ. Вычитаю 1225 изъ 1225, въ остаткѣ нуль. И такъ 125 есть искомой квадратной корень 15625.

86. Сыскать $\sqrt{104101209}$?

1,04,10,12,09	10203 корень.
1	
041,0	202
404	
6120,9	20403
61209	

Въ примѣрѣ семъ имѣемъ мы пять частей, четыре по 2 цыфры и одну изъ одной; извлекаю корень изъ единицы, онъ есть 1 и пишу ее въ корнѣ; вычитаю 1 изъ 1, въ остаткѣ нуль; сношу часть 04, отмѣтя 4 останется нуль; къ 4 сношу 10, отмѣчаю 0 и дѣлю 41 на 10×2, въ частномъ получаю 2, ставлю цыфру сію въ корнѣ возлѣ 10 и возлѣ 20 дѣлителя. Множу 202 на 2 и произведенїе 404 вычитаю изъ 410, въ остаткѣ получаю цыфру 6. Къ сей сношу 12 отмѣчаю 2 и вижу что 61 на 204 дѣлиться не можетъ, почему въ корнѣ ставлю подлѣ 102 нуль, а къ 612 сношу часть 09. Теперь отъ 61209 отдѣляю 9 и дѣлю 6120 на 1020×2, что есть 2040. Въ частномъ нахожу 3: ставлю цыфру сїю въ корнѣ подлѣ дѣлителя. Множу 20403 на 3 и произведенїе 61209 вычитаю изъ 61209, въ остаткѣ нуль. И такъ 10203 есть точной квадратной корень 104101209.

Причина раздѣленїя числа 104101209 на пять частей таже какая въ предыдущихъ примѣрахъ; по 85 члену нахожу, что корень самаго большаго квадрата заключающагося въ первыхъ трехъ частяхъ 1,04,10 есть 102. Послѣ 1 въ корнѣ потому ставится нуль, что снеся часть 04 и отдѣля 4, остается нуль, сїе показываетъ что единицъ въ корнѣ не находится; въ самомъ дѣлѣ въ 104 большой самой квадратъ заключающїйся есть 10 съ остаткомъ 4; потомъ вычтя изъ 10410 квадратъ числа 102, получаю въ остаткѣ цыфру 6, къ коей сношу часть 12: отдѣля 2 вижу, что 61 на 102×2 дѣлиться не можетъ

почему и ставлю въ корнѣ подлѣ 102 нуль. Сношу къ 612 часть 09 и отдѣляю 9; раздѣля число 6120 на 1020×2, получаю для единицъ корня цыфру 3; множу 20403 на 3, нахожу что 10203 есть точной квадратной корень 104101209.

87. Такимъ образомъ разсмотрѣвши вышеупомянутые примѣры заключимъ вообще: *Чтобъ извлечь квадратной корень изъ какого нибудь числа, раздѣли оное число на части, заключающїя по двѣ цыфры, начиная отъ правой руки къ лѣвой, послѣдняя часть къ лѣвой рукѣ можетъ заключать двѣ цыфры, иногда же и одну. Извлеки корень квадратной изъ большаго квадрата, заключающагося въ первой части: это будетъ первая цыфра корня; вычти квадратъ сего корня изъ первой части; къ остатку снеси слѣдующую часть и отдѣля цыфру единицъ раздѣли остальное число на удвоенное сысканное число корня. Частное будетъ вторая цыфра корня; написавши ее въ корнѣ по правую сторону первой, и также въ дѣлителѣ по правую сторону, помножь число отъ сего произшедшее на сысканное частное и произведенїе вычти изъ всего числа стоящаго подъ чертою: естьли произведенїе произойдетъ больше сего числа, то частное должно уменьшить единицею, а иногда двумя и болѣе, дабы произведенїе сысканныхъ единицъ на двойные десятки сложенные съ сими единицами не превосходило онаго числа. Къ*

остатку снеси слѣдующую часть, и отдѣля цыфру къ правой рукѣ стоящую, раздѣли остальные цыфры на удвоенное сысканное уже число корня. Такимъ образомъ получится третья цыфра корня, съ которой должно поступить по прежнему. Естьли случится, что снеся къ остатку слѣдующую часть, и отдѣля цыфру къ правой рукѣ стоящую, остальное число не можетъ дѣлиться на удвоенное сысканное число корня; то надлежитъ въ частномъ поставить нуль, и снеся еще часть отмѣтить цыфру послѣднюю къ правой рукѣ, потомъ дѣлить остальное число на удвоенное число всѣхъ цыфръ корня, частное будетъ цыфра корня.

88. Опасаясь иногда взять слишкомъ большое число случается взять слишкомъ малое. Сія ошибка познается слѣдующимъ образомъ: прибавя 1 къ удвоенному числу корня, ежели остатокъ будетъ равенъ данной суммѣ или еще больше оной, то надобно частное увеличить единицею. Вотъ причина сего: пусть будетъ a, число стоящее въ корнѣ, квадратъ его a^2, квадратъ же $a+1$ будетъ a^2+2a+1, разность сихъ квадратовъ $2a+1$; слѣдовательно ежели остатокъ есть $2a+1$ или $>2a+1$, то сіе значитъ, что должно цыфру корня увеличить покрайней мѣрѣ единицею.

Самой лучшій способъ пріучить себя къ практикѣ извлеченія квадратныхъ корней состоитъ въ частомъ составленіи квадратовъ и потомъ извлеченія изъ нихъ корней. Извлеченіе корней

дѣлается гораздо скорѣе, когда кто привыкъ дѣлать умноженія и вычитанія вмѣстѣ.

89. Естьли данной квадратъ можетъ раздѣлиться на 4, 9, 25 и вообще другой какой нибудь квадратъ, то сіе иногда очень полезно; тогдабъ надлежало извлечь корень изъ частнаго того и помножить его на 2, 3, 5 и вообще на корень дѣлителя. Естьлибы раздѣлили извлекаемое число на нѣсколько квадратовъ, тогда бы надлежало корень изъ послѣдняго частнаго помножить на произведеніе корней дѣлителей; на примѣръ требуется $\sqrt{36864}$; дѣлю 36864 на 4 и получаю въ частномъ 9216, которое снова дѣлю на 4 и нахожу 2304, дѣлю сіе число на 9 и имѣю 256, коего корень есть 16. Теперь множу 16 на 12, произведеніе трехъ корней 2, 2, 3 квадратовъ 4, 4, 9, и получаю число 192, которое будетъ точной корень 36864.

Вотъ причина сего правила: изобразимъ чрезъ a^2, b^2, c^2, квадраты служащіе дѣлителями и m^2 частное, данное количество будетъ имѣть слѣдующій видъ $a^2b^2c^2m^2$; но $\sqrt{a^2b^2c^2m^2} = abcm$: ибо $(abcm)^2 = abcm \times abcm = a^2b^2c^2m^2$.

90. Изъ всякаго цѣлаго числа можно составить квадратъ, но не изъ всякаго извлечь квадратной корень; на примѣръ числа 2, 24, 131 и прочія точнаго корня не имѣютъ. Въ нихъ корень сыскивается чрезъ приближеніе въ десятичныхъ частяхъ по слѣдующему примѣру:

Извлечь $\sqrt{2}$ въ тысячныхъ частяхъ?

2.00.00.00.	1,414
1	
10,0	
96	24
40,0	
281	281
1190,0	
11296	2824
604.	

Пишу шесть нулей по правую сторону даннаго числа; извлекаю изъ 2,000000 корень какъ изъ цѣлаго числа 2000000, нахожу 1414 съ остаткомъ 604, которые опускаю; отъ 1414 отдѣля три цыфры къ правой рукѣ будетъ числа 2 требуемый квадратный корень 1,414; въ самомъ дѣлѣ $(1{,}414)^2 = 1{,}99936$ и $(1{,}415)^2 = 2{,}002225$. И такъ $\sqrt{2} > 1{,}414$, а $< 1{,}415$; но 1,414 ближе подхо дитъ къ 2, чѣмъ 1,415; и такъ 1,414 есть самый приближенный корень къ 2 въ тысячныхъ частяхъ. Вотъ причина требуется: корень, имѣющій n десятичныхъ частей; слѣдовательно къ данному числу должно приписать $2n$ нулей; извлекши же изъ происшедшаго числа корень должно отдѣлить въ немъ для десятичныхъ частей n цыфръ.

91. Изъ десятичныхъ дробей и десятичныхъ дробныхъ чиселъ, изображающихъ точной квадратъ, извлекается корень такъ какъ бы десятичная дробь, или десятичное дробное число

были цѣлыя числа; потомъ въ корнѣ для десятичныхъ дробей отщитывается цыфръ половина числа цыфръ десятичныхъ въ квадратѣ. Ибо въ квадратѣ десятичной дроби цыфръ десятичныхъ вдвое больше корня. Такимъ образомъ: $\sqrt{0{,}0625}=0{,}25$; $\sqrt{442.\ 807849}=21.043$.

92. Естьли требуется найти квадратной корень изъ десятичной дроби, или изъ десятичнаго дробнаго числа, неизображающихъ совершенной квадратъ, тогда онъ получается приближенный, прибавляя нѣсколько нулей, отъ чего данные числа неперемѣнятся; ибо нули прибавляемые съ правой руки къ десятичнымъ дробямъ, не перемѣняютъ ихъ величины, но ихъ корень будетъ тѣмъ ближе къ настоящему, чѣмъ болѣе придастся нулей. Вотъ два примѣра.

1) Извлечь $\sqrt{1{,}25}$ съ приближенiемъ до тысячныхъ частей?

1,25,00,00	1,118
1	
2,5	21
21	
40,0	221
221	
1799,0	2228
17824	
76	

Пишу здѣсь 4ре нуля; ибо въ корнѣ требуется три десятичныхъ цыфры; слѣдовательно въ извлекаемомъ числѣ ихъ должно находится вдвое.

Нахожу 1118 для $\sqrt{1250000}$; слѣдовательно 1.118 должно быть для $\sqrt{1,250000}$ или $\sqrt{1.25}$; хотя $\sqrt{1.25}$ $>1,118$ и $<1,119$, но первое ближе подходитъ къ $\sqrt{1.25}$.

2) Найти $\sqrt{12,5}$ съ приближенiемъ до 1000хъ частей ?

12,50.00.00.	3,535
9	
35,0	65
325	
250,0	703
2109	
3910,0	7065.
35325	
3775	

Пишу пять нулей здѣсь по тойже причинѣ какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ. И такъ сыскавши 3535 для $\sqrt{12500000}$, будетъ 3,535 для $\sqrt{12,500000}$ или $\sqrt{12,5}$; въ самомъ дѣлѣ $(3,535)^2 = 12,496225$, а $(3,536)^2 = 12,503296$. Слѣдовательно $\sqrt{12.5} > 3,535$ и $<3,536$, но первое ближе къ величинѣ $\sqrt{12,5}$.

93. Мы видѣли выше, что квадратъ дроби состоитъ изъ квадратовъ числителя и знаменателя; слѣдовательно чтобъ извлечь квадратной корень изъ дроби, должно извлечь его какъ изъ числителя такъ и знаменателя. Такимъ образомъ : $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a}{b}$; $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt{\frac{9216}{10201}} = \frac{\sqrt{9216}}{\sqrt{10201}} = \frac{96}{101}$.

94. Естьли только знаменатель точной квадратъ, а числитель нѣтъ; то тогда изъ числителя извлекается корень чрезъ приближенiе и дѣлится на точной корень знаменателя, частное будетъ корень дроби. На примѣръ $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{1,732}{2} = 0,866$; $\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} = \frac{1,414}{3} = 0,471$.

95. Естьли знаменатель и числитель не точные квадраты, тогда дѣлаемъ знаменателя точнымъ квадратомъ, помножа оба члена дроби на знаменателя, и поступаемъ по предыдущему; на примѣръ: $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{2,449}{3} = 0,816$.

96. Также поступаютъ и тогда, когда числитель точный квадратъ, а знаменатель нѣтъ; на примѣръ: $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{1,414}{2} = 0,707$. То же бы получили когда извлекши изъ знаменателя корень чрезъ приближенiе, раздѣлили на него корень числителя; на примѣръ: $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,414} = 0,707$.

97. Естьли оба члена дроби не суть точные квадраты, тогда извлекается изъ каждаго члена корень чрезъ приближенiе, и потомъ корень числителя дѣлится на корень знаменателя, частное будетъ искомой корень :

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1,414}{1,732} = 0,816.$$

98. Изъ дробей, коихъ члены не суть точные квадраты можно извлекать корень иначе, и какъ кажется гораздо простѣе. Для сего надлежитъ данную дробь превратить въ десятичную, изъ которой извлекши квадратной корень, получимъ искомой корень; на примѣръ : $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5} = \sqrt{0,707}$, $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,666666 = 0,816$.

99. Чтобъ извлечь корень изъ дробнаго числа надлежитъ его сперва превратить въ дробь и потомъ изъ оной извлечь корень; на примѣръ: $\sqrt{8\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{59}{7}} = \sqrt{\frac{413}{49}} = \frac{20{,}322}{7} = 2.903$, или $\sqrt{8\frac{3}{7}} = \sqrt{8{,}428575} = 2{,}903$.

Объ извлеченіи изъ Алгебраическихъ количествъ квадратныхъ корней.

100. Корень квадратной изъ $4a^2b^2 = \pm 2ab$, ибо $+2ab \times +2ab = 4a^2b^2$ и $-2ab \times -2ab = +4a^2b^2$; равномѣрно $\sqrt{81a^2c^2} = \pm 9ac$; $\sqrt{2a^2} = \pm 1{,}414a$; $\sqrt{\frac{4a^2}{25b^2}} = \pm\frac{2a}{5b}$, ибо $\pm\frac{2a}{5b} \times \pm\frac{2a}{5b} = \pm\frac{4a^2}{25b^2}$; $\sqrt{\frac{1}{4}a^2b^2} = \pm\frac{1}{2}ab$; $\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \pm 0{,}707a$.

101. Чтобъ извлечь квадратной корень изъ трехчленнаго количества надобно припомнить, что квадратъ двухчленнаго количества состоитъ изъ квадрата перваго члена, изъ двойнаго произведенія перваго на второй, и изъ квадрата втораго члена; и такъ

$$
\begin{array}{l|l}
36a^2 + 60ab + 25b^2 & \\
\underline{-36a^2} & \underline{\;6a + 5b\;} \\
\quad 60ab + 25b^2 & 12a + 5b \\
\quad \underline{60ab + 25b^2} &
\end{array}
$$

Ищу корень перваго члена $36a^2$ и нахожу его $6a$, которой ставлю по сторону даннаго количества. Составляю квадратъ изъ сего корня, вычитаю $36a^2$ изъ даннаго количества и получаю въ остаткѣ $60ab + 25b^2$. Подъ корнемъ $6a$ ставлю его же удвоенной $12a$, дѣлю на $12a$ остальную часть $60ab + 25b^2$, въ частномъ нахожу $5b$, которое

пишу подлѣ корня $6a$ и получаю искомой корень $6a + 5b$; но дабы увѣрится въ точности ставлю частное $5b$ возлѣ $12a$, и умноживъ $12a + 5b$ на $5b$, произведеніе вычитаю изъ $60ab + 25b^2$. Въ остаткѣ ничего. И такъ $6a + 5b$ есть точной квадратный корень изъ $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

102. Ежели количество изъ котораго требуется извлечь квадратной корень состоитъ болѣе чѣмъ изъ трехъ членовъ, тогда корень его не можетъ быть двухчленное количество; но оно есть трехчленное, когда количесшво данное шестичленное, и такъ далѣе; ибо $(a+b+c)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2 = (a+b)^2+2(a+b)c+c^2$, то есть онъ состоитъ: 1[е]) изъ квадрата двухъ первыхъ членовъ; 2[е] изъ двойнаго произведенія двухъ первыхъ членовъ на третій; и 3[е]) изъ квадрата третьяго члена. И такъ надобно сперва сыскать два первые члена, а потомъ третій. Извлечь $\sqrt{(4a^2 + 12ab + 9b^2 + 16ac - 24bc + 16c^2)}$?

Располагая все составное количество по буквѣ a будетъ

$$
\begin{array}{l|l}
4a^2 - 12ab + 9b^2 + 16ac - 24bc + 16c^2 & \\
\underline{-4a^2} & \underline{\;2a - 3b + 4c\;} \\
\quad -12ab + 9b^2 + 16ac - 24bc + 16c^2 & \\
\quad \underline{+12ab - 9b^2} & 4a - 5b \\
\qquad\qquad +16ac - 24bc + 16c^2 & \\
\qquad\qquad \underline{-16ac + 24bc - 16c^2} & 4a - 6b + 4c. \\
\qquad\qquad\qquad\quad '' \qquad\quad '' &
\end{array}
$$

Извлекаю корень изъ перваго члена $4a^2$, онъ есть $2a$, коего квадратъ вычитаю изъ даннаго количества, дѣлю $-12ab$ на удвоенный первый членъ корня $2a$, то есть на $4a$, частное $3b$ будетъ второй членъ корня; множу $4a-3b$ на $-3b$; произведенїе $-12ab+9b^2$ вычитаю изъ перваго остатка. Такимъ образомъ получаю второй остатокъ $+16ac-24bc+16c^2$, которой долженъ еще содержать двойное произведенїе суммы двухъ первыхъ членовъ на третїй; ибо изъ даннаго квадрата отнятъ только квадратъ двухъ первыхъ членовъ; дѣлю остатокъ сей на $2.(2a-3b)$, то есть на $4a-6b$; въ частномъ получаю $4c$, пишу его въ корнѣ возлѣ $2a-3b$ и подлѣ $4a-6b$. Множу $4a-6b+4c$ на $4c$ и произведенїе $+16ac-24bc+16c^2$ вычитаю изъ втораго остатка, въ остаткѣ нуль.

Итакъ $2a-3b+4c$ есть точный корень даннаго количества.

103. Извлечь $\sqrt{\frac{a^2+6ab+9b^2}{4a^2-4ab+b^2}}$?

Говорю $\sqrt{\frac{a^2+6ab+9b^2}{4a^2-4ab+b^2}} = \frac{\sqrt{(a^2+6ab+9b^2)}}{\sqrt{(4a^2-4ab+b^2)}} = \frac{a+3b}{2a-b}$.

ГЛАВА IX.

О составленїи кубовъ и объ извлеченїи кубическихъ корней.

104. *Кубъ* или *третья степень*, количества есть произведенїе того количества на квадратъ его; такимъ образомъ: 1000, или 100×10 есть кубъ 10; a^3, или $a^2\times a$ кубъ a.

Названїе куба дано Геометрами потому, что для опредѣленїя толстоты куба должно помножить квадратъ основанїя его на бокъ того же квадрата; названїе же третьей степени происходитъ отъ того, что сїе количество есть произведенїе трехъ равныхъ факторовъ.

105. Кубъ количества изображается показателемъ 3, а производится чрезъ помноженїе онаго количества на квадратъ его, или самаго на себя два раза; такимъ образомъ:

$$(10)^3=(10)^2\times(10)=10\times10\times10=1000.$$
$$(25)^3=(25)^2\times(25)=625\times25=15625.$$
$$(a)^3=a^2\times a=a\times a\times a=a^3.$$
$$(-a)^3=+a^2\times-a=-a\times-a\times-a=-a^3.$$
$$(a+b)^3=(a+b)^2\times(a+b)=(a^2+2ab+b^2)\times(a+b)=$$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; то есть: *кубъ двучленнаго количества состоитъ:* 1е. *изъ куба перваго члена*, 2е. *изъ утроеннаго произведенїя квадрата перваго члена на второй*, 3е. *изъ утроеннаго произведенїя перваго на квадратъ втораго члена*, 4е. *изъ куба втораго члена.*

$(a-b)^3=(a-b)^2\times(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

$(a+b+c)^3=(a+b+c)^2\times(a+b+c)=$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+$

$3bc^2+c^3=$

$(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)\times c^2+c^3$, то есть:

Кубъ трехчленнаго количества состоитъ 1е. изъ куба первыхъ двухъ членовъ, 2е. изъ тройнаго произведенія квадрата первыхъ двухъ членовъ на третій, 3е. изъ тройнаго произведенія первыхъ двухъ членовъ на квадратъ третьяго, и 4е. изъ куба третьяго члена.

$(\frac{2}{3})^3=(\frac{2}{3})^2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$.

$(\frac{a}{b})^3=(\frac{a}{b})^2\times\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}$.

$(\frac{12}{15})^3=(\frac{12}{15})^2\times\frac{12}{15}=\frac{144}{225}\times\frac{12}{15}=\frac{1728}{3375}$.

$\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3=\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3_3=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{c^3-3c^2d+3cd^2+d^3}$.

$(0,25)^3=(0,25)^2\times0,25=0,0625\times0,25=0,015625$.

$(2,03)^3=(2,03)^2\times2,03=4,129\times2,03=8,365427$.

Сіи послѣдніе два примѣра показываютъ, что въ кубѣ десятичной дроби десятичныхъ цыфръ втрое.

106. Чиселъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Кубы 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Такъ какъ кубъ 10 есть 1000, то заключаю, что кубической корень числа, состоящаго изъ трехъ цыфръ, имѣетъ одну цыфру.

107. *Кубъ числа, состоящаго изъ десятковъ и единицъ, заключаетъ въ себѣ 1е. кубъ десятковъ, 2е утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы, 3е. утроенное произведеніе десятковъ на квадратъ единицъ, и 4е кубъ единицъ*; то есть:

$$
\begin{array}{rcr}
(64)^3=(60)^3 & = & 216000. \\
+3\times(60)^2\times4 & = & 43200. \\
+3\times(60)\times4^2 & = & 2880. \\
+\quad 4^3 & = & 64. \\
\hline
(64)^3 & = & 262144.
\end{array}
$$

Ибо $64=60+4$; представя $60=a$, $4=b$, будетъ $60+4=a+b$ и $(64)^3=(60+4)^3=(a+b)^3$, но $(a+b^3)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, слѣдовательно $(64)^3=(60)^3+3\times(60)^2\times4+3\times60\times4^2+4^3=262144$.

108. Составить изъ 125 кубъ?

Говорю $125=100+20+5$; пусть будетъ $100=a$, $20=b$, $5=c$; и такъ $(125)^3=(100+2+5)^3=(a+b+c)^3$, но $(a+b+c)^3=(a+b)^3+3\times(a+b)^2\times c+3(a+b)\times c^2+c^3$. Слѣдовательно $(125)^3=(120)^3+3(120)^2\times5+3\times120\times5^2+5^3=(100)^3+3\times(100)^2\times20+3\times100\times(20)^2+(20)^3+3\times(100)^2\times5+3\times2\times100\times20\times5+3\times(20)^2\times5+3\times120\times5^2+5^3=1953125$.

Объ извлеченіи изъ чиселъ кубическихъ корней.

109. Извлечь изъ даннаго количества *кубической корень* значитъ найти такое количество, которое будучи помножено само на себя два раза, или разъ на квадратъ свой, произвело бы данное количество; такимъ образомъ: a, 2, $\frac{a}{b}$, $\frac{2}{3}$, $a+b$ суть кубическіе корни a^3, 8, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{8}{27}$, $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Въ самомъ дѣлѣ $a \times a \times a = a^3$; $2 \times 2 \times 2 = 8$, $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{a^3}$, $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$, $(a+b)(a+b)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Извлеченіе кубическихъ корней есть совершенно противное дѣйствіе составленію кубовъ. Кубической корень означается знакомъ $\sqrt[3]{}$.

110. Извлечь $\sqrt[3]{262144}$?

Данной кубъ	262,144	64	искомый корень.
Кубъ 6 десятковъ	216		
	461,44	108	утроенный квадратъ 6.
Кубъ $64 = 64 \times 64 \times 64 =$	262144		

Поступай такъ: 1е. Проведи вертикальную линею по правую сторону даннаго куба 262144; 2е раздѣли данное число на части, начиная отъ правой руки къ лѣвой, изъ коихъ бы каждая заключала три цыфры послѣдняя жожетъ иногда содержать двѣ и одну даже цыфру 3е. Подъ частію 262 подпиши 216 самой большой кубъ, заключающійся въ 262. 4е По правую сто-

рону даннаго числа напиши 6, корень 216; цыфра сія 6 означаетъ десятки корня 5е. Вычти 216, кубъ 6, изъ части 262 и къ остатку 46 припиши часть 144. 6е Отъ числа 46144 отмѣть двѣ послѣднія цыфры 44 и раздѣли число 461 на 108, утроенной квадратъ 6. 7е Напиши частное 4 въ корнѣ по правую сторону 6. 8е Составь изъ сысканнаго корня 64 кубъ. Ежели получишъ, что кубъ сей равенъ, такъ какъ въ семъ примѣрѣ, данному числу, то значитъ, что сысканной корень вѣренъ и данное число есть точный кубъ; естьли же составя изъ сысканнаго корня кубъ, онъ больше даннаго числа, то сіе показываетъ, что надобно цыфру корня увеличить единицею, а иногда и больше. Когда составя изъ сысканнаго корня кубъ и вычтя его изъ даннаго числа, получимъ остатокъ, то сіе значитъ что данное число не имѣетъ точнаго корня: боясь въ семъ случаѣ не малъ ли сысканной корень, надлежитъ послѣднюю цыфру его увеличитъ единицею и изъ произшедшаго числа составить кубъ; когда будетъ кубъ сей больше даннаго числа, то значитъ, что сысканной корень вѣренъ.

Вотъ причина дѣлопроизводства сего: такъ какъ данное число больше 1000, то корень сего числа состоитъ изъ десятковъ и единицъ; но причинѣ же, что кубъ десятковъ не можетъ заключатся въ сотняхъ, десяткахъ и единицахъ, то и отмѣчаю 3 цыфры 144 запятою: самой большой кубъ десятковъ заключающійся въ 262 очевидно есть 216, кубъ 6. И такъ 6 есть цыфра, означающая десятки корня. Вычтя 216 изъ 262, и снеся часть 144, получаю число 4614; но такъ какъ утроенной квадратъ десятковъ на единицы не можетъ заключаться въ десяткахъ и единицахъ, то 44 отдѣляю запятою; а чтобъ узнать единицы корня, то дѣлю 461 на 108, утроенной квадратъ 6. Частное число 4 будетъ искомая цыфра; составя кубъ изъ 64 получаемъ точно данное число 262144. И такъ 64 есть точный искомый корень.

111. Сыскать $\sqrt[3]{2197}$?

2,197	13 искомой корень.
1	
119,7	3 утроенный квадратъ 1.
2197	

Поступая по предыдущему найдемъ, что $\sqrt[3]{2197}=13$.

112. Найти $\sqrt[3]{860085351}$?

Данный кубъ	860,085,351	951 Искомый корень.
Кубъ 9	729	
	1310,85	243 утроенной квадратъ 9.
Кубъ 95	857375	
	27103,51	
Кубъ 951	860085351	27075 утроенный квадратъ 951.
	" " "	

1^{e} Раздѣли число, начиная отъ правой руки къ левой, на части заключающія по три цыфры. 2^{e} Подъ 860 подпиши 729, самой большой кубъ въ семъ числѣ заключающійся. 3^{e} Корень сего куба напиши по правую сторону даннаго числа. 4^{e} Вычти 729 изъ 860 и къ остатку 131 снеси слѣдующую часть 085, отъ чего произойдетъ 131085. 5^{e} Отъ числа сего отдѣли къ правой рукѣ двѣ цыфры и раздѣли 1310 на 243, утроенной квадратъ 9. 6^{e} Частное 5 напиши въ корнѣ возлѣ 9. 7^{e} Изъ 95 составь кубъ и вычти его изъ первыхъ двухъ частей 860085. 8^{e} Къ остатку 2710 снеси часть 351. 9^{e} Отъ числа 2710351 отдѣли къ правой рукѣ двѣ цыфры 51, и 27107 раздѣли на 27075, утроенной квадратъ 95. 10^{e} Частное 1 напиши въ корнѣ по правую сторону 95. 11^{e} Изъ 951 составь кубъ, которой будетъ 860085351. 12^{e} Вычти кубъ сей изъ даннаго числа; но такъ какъ остатка никакого не происходитъ, то можно заключить, что 951 есть точный искомый кубической корень.

Вотъ почему такъ должно поступать. Такъ какъ данное число 860085351 заключаетъ въ себѣ больше трехъ цыфръ, то корень его долженъ состоять изъ десятковъ и единицъ; но такъ какъ корень десятковъ заключается въ тысячахъ, по сему отдѣляю отъ даннаго числа съ правой стороны три цыфры и происходитъ число 860085. Теперь разсматриваю число сїе, вижу что въ немъ заключается цыфръ болѣе трехъ; и такъ корень его состоитъ изъ десятковъ и единицъ; но по причинѣ, что кубъ десятковъ заключается единственно въ тысячахъ, отдѣляю съ правой руки три цыфры 085. Вотъ причина раздѣленія даннаго кубическаго числа на части, заключающія по три цыфры. Изъ числа 860085 извлекаю корень на основаніи предыдущаго примѣра, и нашедши что онъ равенъ 95, кубъ сего числа 857375 вычитаю изъ 860085; въ остаткѣ получаю 2710 и сношу къ нему часть 351. И такъ число 2710351 представляетъ утроенное произведеніе квадрата 95 десятковъ на искомые единицы, утроенное произведеліе 95 десятковъ на квадратъ искомыхъ единицъ и кубъ ихъ; ибо изъ числа 860085351 уже вычтенъ кубъ 95 десятковъ; слѣдовательно чтобъ узнать единицы, дѣлю число 27103 на 27075 утроенной квадратъ 95 десятковъ, и получаю въ частномъ для корня 1. Дѣлю на 27075 число 27103, а не 2710351 на 27103, потому что квадратъ десятковъ заключаться въ десяткахъ и единицахъ неможетъ: вотъ причина отдѣленія двухъ цыфръ. Составя изъ 951 кубъ, и вычтя его изъ даннаго числа, нахожу что остатка нѣтъ никакого; и такъ 951 есть точной искомой корень даннаго числа.

Естьлибъ данное число имѣло больше цыфръ, слѣдовательно и частей; тогдабъ надлежало поступать какъ съ третьею частію.

113. И такъ вообще: чтобъ извлечь изъ даннаго кубическаго числа корень, проведи вертикальную линею; потомъ, начиная отъ правой руки къ левой, раздѣли данное число на части, заключающія по три цыфры, изъ коихъ послѣдняя можетъ заключать двѣ и даже одну цыфру. Извлеки кубической корень изъ самаго большаго куба, заключающагося въ первой части: это будетъ первая цыфра корня. Вычти кубъ сей цыфры изъ первой части и къ остатку снеси слѣдующую часть; отмѣтя цыфры десятковъ и единицъ, остальное число раздѣли на утроенной квадратъ сысканной цыфры корня. Частное будетъ вторая цыфра корня: напиши ее въ корнѣ возлѣ первой. Составя изъ сысканныхъ двухъ цыфръ корня кубъ, вычти его изъ первыхъ двухъ частей. Къ остатку снеси слѣдующую часть, и отмѣтя отъ произшедшаго числа къ правой рукѣ двѣ цыфры, остальное число раздѣли на утроенный квадратъ сысканныхъ двухъ цыфръ корня. Частное будетъ третья цыфра корня; написавши ея въ корнѣ, изъ произшедшаго числа составь кубъ, и вычти его изъ первыхъ частей даннаго куба. Съ остаткомъ и прочими частями поступай подобнымъ образомъ. Естьли же во время производства случится, что снеся къ остатку часть даннаго куба, и отдѣля отъ произшедшаго такимъ образомъ числа двѣ цыфры къ правой рукѣ, остальное число будетъ меньше утроеннаго квадрата сысканныхъ уже цыфръ корня; тогда должно поставить въ частномъ нуль и снести слѣдующую часть даннаго куба: отмѣтя отъ произшедшаго числа, къ правой руки двѣ цыфры, остальное число раздѣли на утроенной квадратъ корня; частное будетъ новая цыфра корня.

114. Изъ всякаго цѣлаго числа можно составить кубъ, но не изъ всякаго можно извлечь точный кубической корень; на примѣръ число 28348 точнаго кубическаго корня не имѣетъ. Въ такомъ случаѣ корень сыскивается приближенной въ десятичныхъ частяхъ по слѣдующему примѣру.

Извлечь $\sqrt[3]{2}$ въ тысячныхъ частяхъ?

2,000,000,000	1,259
1	
10.00	3
1728	
2720.00	432
1951125	
468750.00	46875.
1995616978	
4383022	

Пишу по правую сторону даннаго числа девять нулей; извлекаю изъ 2,000000000 кубической корень точно такъ какъ изъ цѣлаго числа 2000000000; нахожу что корень послѣдняго числа равенъ 1259; и такъ корень числа 2 будетъ 1,259: корень сей тѣмъ ближе будетъ подходить къ настоящему, чѣмъ въ большихъ частяхъ его возмемъ, то есть чѣмъ больше прибавится нулей къ данному извлекаемому числу.

Вотъ причина: требуется, чтобъ корень имѣлъ n частей; слѣдовательно къ данному кубу должно прибавить 3n частей, ибо въ кубѣ десятичной дроби частей втрое. И такъ извлекши корень

изъ числа происшедшаго чрезъ прибавленіе къ данному нулей, должно отдѣлить въ немъ для десятичныхъ частей n цыфръ.

115. Изъ десятичныхъ дробей и изъ десятичныхъ дробныхъ чиселъ, изображающихъ точной кубъ, извлекается кубической корень такъ какъ бы онѣ были цѣлыя числа; потомъ въ корнѣ для десятичныхъ частей, отсчитывается цыфръ третья часть противъ десятичныхъ цыфръ въ извлекаемомъ числѣ. Ибо въ кубѣ десятичнаго числа цыфръ десятичныхъ втрое больше противъ корня.

Такимъ оброзомъ:

$\sqrt[3]{0{,}015625}=0{,}25$; $\sqrt{8{,}365427}=2{,}03$.

116. Естьли требуется опредѣлить кубической корень десятичной дроби или десятичнаго дробнаго числа, непредставляющихъ совершеннаго куба, тогда онъ получается приближенной, прибавляя нѣсколько нулей; чѣмъ больше припишется нулей, тѣмъ корень будетъ ближе подходить къ настоящему: величина же отъ прибавленія нулей неперемѣняется, ибо нули прибавляемые съ правой стороны къ десятичнымъ дробямъ величины ихъ не перемѣняютъ. Пусть должно извлечь $\sqrt[3]{1{,}25}$ въ сотыхъ частяхъ.

И такъ по силѣ вопроса должно имѣть въ корнѣ двѣ десятичныхъ цыфры; слѣдовательно ихъ должно находится въ данномъ кубѣ шесть; но какъ ихъ уже двѣ есть, то прибавить надобно только четыре нуля.

И такъ $\sqrt[3]{1,25}=1,05$.

$$\begin{array}{r|l} 1,250,000 & 105 \\ 1 & \\ \hline 2500.00 & 300. \\ 1157625 & \\ \hline 92375 & \end{array}$$

117. Мы видѣли, что кубъ дроби состоитъ изъ куба числителя раздѣленнаго на кубъ знаменателя; слѣдовательно, *чтобъ извлечь изъ дроби кубической корень, должно его извлечь какъ изъ числителя такъ и изъ знаменателя*; такимъ образомъ:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a}{b};\quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}.$$

118. Естьли знаменатель точный кубъ, а числитель нѣтъ; тогда извлеки изъ числителя корень приближенной и раздѣли его на точный знаменателя; на примѣръ:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{27}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1,254}{3} = 0,418.$$

119 Естьли числитель точный кубъ, а знаменатель нѣтъ; тогда извлеки изъ знаменателя приближенной корень и раздѣли на него точной корень числителя; на примѣръ:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{12}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{12}} = \frac{2}{2,289} = 0,87.$$

120. Когда оба члена дроби не точные кубы, тогда приведи ее въ десятичную и извлеки изъ ней кубической корень; на примѣръ: $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0,666666} = 0,87$.

121. Чтобъ извлечь кубической корень изъ смѣшеннаго числа, преврати его въ неправильную дробь, или въ десятичное дробное число, и извлеки корень; на примѣръ: $\sqrt[3]{1\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5\times10}{4\times2}} = \sqrt[3]{\frac{10}{8}} = \frac{2,10}{2} = 1,05$; или $\sqrt[3]{1\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{1,25} = 1,05$.

Объ извлеченіи кубическихъ корней изъ алгебраическихъ количествъ.

122. Кубической корень изъ $8a^3b^3 = 2ab$, ибо $2ab \times 2ab \times 2ab = 8a^3b^3$; равномѣрно $\sqrt[3]{-27m^3} = -3m$, $\sqrt[3]{2a^3} = 1,258a$. $\sqrt[3]{\frac{64a^3}{125b^3d^3}} = \frac{4a}{5bd}$, ибо $\frac{4a}{5bd} \times \frac{4a}{5bd} \times \frac{4a}{5bd} = \frac{64a^3}{125b^3d^3}$; равномѣрно $\sqrt[3]{\frac{2}{3}a^3} = 0,87a$, $\sqrt[3]{\frac{1}{64}b^3d^3} = \frac{1}{4}bd$.

123. Сыскать $\sqrt[3]{(a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3)}$?

$$\begin{array}{r|l} a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3 & a+2b \\ a^3 & \\ \hline +6a^2b+12ab^2+8b^3 & 3a^2 \\ -a^3-6a^2b-12ab^2-ab^3 & \\ \hline \text{"} \quad\quad \text{"} & \end{array}$$

Чтобъ извлечь кубической корень изъ четырехчленнаго количества, то должно припомнить, что кубъ двучленнаго количества состоитъ изъ куба перваго члена, утроеннаго произведенїя изъ квадрата перваго на вторай, утроеннаго произведенїя изъ перваго на квадратъ втораго, и куба втораго члена. И такъ ищу корень перваго члена a^3; нахожу что онъ есть a, и пишу его по правую сторону даннаго количества; кубъ изъ a вычитаю изъ даннаго количества, и получаю въ остаткѣ $6a^2b+12ab^2+8b^3$; пишу подъ корнемъ утроенной его квадратъ $3a^2$, и дѣлю на него первой членъ остатка; частное $+2b$ пишу въ корнѣ возлѣ a; изъ $a+2b$ составляю кубъ и вычитаю изъ даннаго количества. Такъ какъ остатка нѣтъ никакого, то заключаю что $a+2b$ есть точный искомой корень даннаго количества $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$. Причина сего дѣлопроизводства очевидна: она есть противная составленїю куба.

124. Ежели количество состоитъ больше нежели изъ четырехъ членовъ, тогда корень его будетъ заключать три члена: ибо $(a+b+c)^3 = (a+b)^3+3(a+b)^2\times c+3\times(a+b)\times c^2+c^3$. И такъ даннаго количества надобно сперва сыскать въ корнѣ первые два члена, а потомъ третїй; на примѣръ:

125. Извлечь $\sqrt[3]{(27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3+27a^2c+9ac^2+36abc+6bc^2+12b^2c+c^3)}$?

$27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3+27a^2c+9ac^2+36abc+6bc^2+12b^2c+c^3$	$3a+2b+c$
$17a^3$	
$54a^2b+36ab^2+8b^3+27a^2c+9ac^2+36abc+6bc^2+12b^2c+c^3$	$27a^2$
$-27a^3-54a^2b-36ab^2-8b^3$	
$27a^2c+9ac^2+36abc+6bc^2+12b^2c+c^3$	$9a^2+12ab+4b^2$
$-27a^3-54a^2b-36ab^2-8b^3-27a^2c-9ac^2-36abc-6bc^2-12b^2c-c^3$	$27a^2+36ab+12b^2$

Извлекаю изъ $27a^3$ корень, нахожу его $3a$, вычитаю $27a^3$, кубъ $3a$, изъ даннаго количества; первой членъ остатка $54a^3b$ дѣлю на $27a^2$, утроенный квадратъ $3a$, частное $2b$ ставлю въ корнѣ возлѣ $3a$; изъ $3a+2b$ составляю кубъ $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$ и вычитаю его изъ даннаго количества. Изъ $3a+2b$ составляю квадратъ $9a+12ab+4b^2$, утроя его будетъ $27a^2+36ab+12b^2$; но такъ какъ второй членъ содержитъ въ себѣ утроенной квадратъ первыхъ двухъ членовъ на третій, то чтобъ узнать сей третій членъ, дѣлю второй остатокъ на $27a^2+36ab+12b^2$. Въ частномъ получаю c: это третій членъ. Для удостовѣренія что $3a+2b+c$ есть точный корень, составляю изъ него кубъ и вычитаю изъ даннаго количества: въ остаткѣ ничего. И такъ $3a+2b+c$ есть искомой корень.

126. Извлечь $\sqrt[3]{\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^3+12a^2+48a+64}}$?

Говорю $\sqrt[3]{\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^3+12a^2+48a+64}} = \frac{\sqrt[3]{(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)}}{\sqrt[3]{(a^3+12a^2+4ab+64)}} = \frac{a-b}{a+4}$.

ГЛАВА X.

Объ уравненіяхъ первой степени.

127. *Уравненіе* есть выраженіе двухъ равныхъ количествъ. Такимъ образомъ выраженія $x=a$, $\frac{ax}{d}+b=c$, $x^2+2x=a$ суть уравненія.

128. Уравненіе называется *первой степени*, когда неизвѣстное въ немъ первой степени; на примѣръ: $x=a$, $\frac{ax}{d}+q=c$.

Уравненіе второй степени есть то, въ которомъ заключается вторая степень неизвѣстнаго, или произведеніе двухъ *неизвѣстныхъ*: на примѣръ: $x^2=b$, $x^2+2x=a$, $xy+ax=b$.

Уравненіе третьей степени называется то, въ которомъ находится третья степень неизвѣстнаго, или произведеніе трехъ неизвѣстныхъ, или произведеніе квадрата одного неизвѣстнаго на другое неизвѣстное; на примѣръ $x^3=a$, $xyz=bd$, $x^2y=ab$, $x^3+3x^2+xy=m+n$.

Вообще уравненіе $m^{ой}$ степени есть то, въ которомъ находится неизвѣстное возведено въ m степень, или произведеніе m числа неизвѣстныхъ; на примѣръ: $x^m+ax^{m-1}-abx^{m-2}=bd$; $x^{m-3}y^3=b$.

129. Уравненіе въ которомъ одно неизвѣстное, называется уравненіемъ съ однимъ неизвѣстнымъ; на примѣръ: $\frac{ax}{b}+d=c$, $x^2+x=b$.

Уравненіе, въ которомъ заключаются два неизвѣстныхъ, называются уравненіемъ съ двумя неизвѣстными; на примѣръ: $ax+by=cd$, $x^2+ax+y=mn$. И такъ далѣе.

130. Въ уравненіи $\frac{ax}{d}+b=ac+e$, какъ и во всякомъ другомъ, $\frac{ax}{d}+b$ называется *первою частію*, $ac+e$ *второю*.

131. Рѣшить уравненіе значитъ найти величину неизвѣстныхъ количествъ, посредствомъ извѣстныхъ въ уравненіи находящихся. Такъ какъ уравненіе есть равенство количествъ, то способы рѣшенія уравненій основываются на томъ, что естьли 1ᵉ къ обѣимъ частямъ придадутся равныя количества, 2ᵉ отъ обѣихъ отымутся равныя, 3ᵉ обѣ части помножатся или раздѣлятся на равныя, 4ᵉ возведутся въ однѣ степени и 5ᵉ изъ обѣихъ извлекутся какіе нибудь одни корни, то отъ сего уравненія не перемѣнятся.

О рѣшеніи уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

132. Рѣшить уравненіе $\frac{ax}{b}+\frac{c}{e}-\frac{f}{g}=\frac{h}{i}x+\frac{k}{l}-m$?

Привожу всѣ члены къ одинакому знаменателю begil; сіе уравненіе не перемѣнитъ, потому что каждый членъ, на что множу, на то и дѣлю. И такъ уравненіе превратится въ

$$\frac{aegil}{begil}x+\frac{begil}{begil}-\frac{befil}{begil}=\frac{beghl}{begil}x+\frac{begik}{begil}-\frac{begilm}{begil},$$

или $\frac{aegil+begil-befil}{begil}=\frac{beghl\,x+begik-begilm}{begil}$

Помножа обѣ части на begil, уравненіе превратится въ

$$\frac{begil\,(aegil\,x+begil-befil)}{begil}=\frac{(beghl\,x+begik-begilm)\,begil}{begil},$$

или сократя числителя и знаменателя каждой части на begil, будетъ

$aegil\,x+begil-befil=beghl\,x+begik-begilm$;

вычтя изъ обѣихъ частей $beghlx$, будетъ

$aegilx-beghlx+begil-befil=begk-begilm$;

потомъ вычтя изъ обѣихъ частей уравненія

$begil-befil$, будетъ

$aegilx-beghlx=begik-begilm-begil+befil$;

или $(aegil+beghl)x=begik-begilm-begil+befil$,

потому что x, обѣихъ членовъ, первой части есть общій факторъ.

Теперь раздѣля обѣ части послѣдняго вида уравненія на $aegil+beghl$, получимъ

$$x=\frac{begik-begilm-begil+befil}{aegil-beghl}.$$

133. И такъ, чтобъ рѣшить уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, должно сперва *уничтожить знаменателей, естьли они находятся; потомъ перевесть въ первую часть члены, содержащіе неизвѣстное, а во вторую члены, изображающіе данныя количества, перемѣняя знаки, то есть + на —, и — на +*;

наконецъ раздѣлить вторую часть на множителей неизвѣстнаго.

Слѣдующіе примѣры намъ пояснятъ сіе.

I. $x+16=24$, будетъ $x=24-16=8$.

II. $x-4=7$, будетъ $x=7+4=11$.

III. $x-9+6a-3b=14+7a-b$, будетъ $x=14+9+7a-6a+3b-b=23+a+2b$.

IV. $4x-3a-5=9a+15$, будетъ $4x=12a+20$, слѣдовательно $x=\frac{12a+20}{4}=3a+5$.

V. $ax+c=d-bx$, будетъ $ax+bx=d-c$, или $(a+b)x=d-c$, слѣдовательно $x=\frac{d-c}{a+b}$.

VI. $\frac{x}{a}-b=c$, будетъ $x-ab=ac$, слѣдовательно $x=ac+ab$.

VII. $\frac{x}{a-b}=c-d$, будетъ $x=(a-b)(c-d)$, или $x=ac-bc-ad+bd$.

VIII. $\frac{5}{6}x+2a-1=7a+14$ будетъ $5x+12a-6=42a+84$, $5x=42a-12a+84+6$, или $5x=30a+90$, слѣдовательно $x=\frac{30a+90}{5}=6a+18$.

IX. $\frac{a+b}{c+d}x-e=f$, будетъ $(a+b)x-ce-de=cf+df$, и $(a+b)x=ce+cf+de+df$.

Слѣдовательно $x=\frac{ce+cf+de+df}{a+b}$

X. $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=44$, будетъ $6x+3x+2x=264$; слѣдовательно $x=\frac{264}{11}=24$.

XI. $\frac{ax}{b}-\frac{cx}{d}=\frac{e}{f}$, будетъ $adfx-bcfx=bde$, и $(adf-bcf)x=bde$, слѣдовательно $x=\frac{bde}{adf-bcf}$.

XII. $\frac{1}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x$, будетъ $36-24x=24-18x$, $18x-24x=24-36$, $-6x=-12$, или $6x=12$, слѣдовательно $x=\frac{12}{6}=2$.

XIII. $\frac{100}{x}-8=12$, будетъ $100-8x=12x$, $-12x-8x=-100$, $-20x=-100$, или $20x=100$, слѣдовательно $x=\frac{100}{20}=5$.

XIV. $\frac{5x+3}{x-1}=7$, будетъ $5x+3=7x-7$, $-7x+5x=-7-3$, $-2x=-10$, или $2x=10$, слѣдовательно $x=\frac{10}{2}=5$.

XV. $\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{3x+5}{2x-1}$, будетъ $(3x-1)(2x-1)=(3x+5)(2x+1)$, $6x^2-5x+1=6x^2+13x+5$, $-13x-5x=5-1$, $-18x=4$, $-x=\frac{4}{18}$, слѣдовательно $-x=\frac{2}{9}$, или $x=-\frac{2}{9}$.

О рѣшеніи уравненій первой степени со многими неизвѣстными.

134. Сначала предположимъ два уравненія и два неизвѣстныхъ. И такъ пусть будутъ два уравненія $ax+by=c$ и $a'x+b'y=c'$.

Рѣшить сіи два уравненія, значитъ найти такія два количества, изъ коихъ бы одно можно было въ уравненія сіи вставить вмѣсто x, а другое вмѣсто y.

Для достиженія цѣли сей вывожу изъ обѣихъ уравненій величину x изображенную въ y и постоянныхъ (*): такимъ образомъ изъ перваго получу, перенеся by во вторую часть и раздѣля на a, $x = \frac{c-by}{a}$; подобнымъ образомъ изъ втораго выведу $x = \frac{c'-b'y}{a'}$. Теперь сравниваю обѣ величины x и имѣю уравненіе $\frac{c-by}{a} = \frac{c'-b'y}{a'}$, которое разрѣшивши по правиламъ уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ, получу $y = \frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$: вставляю величину y въ выраженіе величины x, нахожу

$$x = \frac{c-b\,\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}}{a} = \frac{\frac{ab'c-a'bc-abc'+a'bc}{ab'-a'b}}{a} = \frac{ab'c-abc'}{a\,(ab'-a'b)} =$$

$$\frac{a\,(b'c-bc')}{a\,(ab'-a'b)} = \frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}.$$

И такъ искомыя величины суть:

$x = \frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$, $y = \frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$.

135. Изъ сего слѣдуетъ, *чтобъ рѣшить два уравненія съ двумя неизвѣстными, должно 1е. вывесть изъ обѣихъ уравненій выраженіе величины какого нибудь неизвѣстнаго въ функціи другаго неизвѣстнаго; 2е изъ двухъ выраженій его составить уравненіе; 3е вывесть изъ него величину втораго неизвѣстнаго;* и *4е вставить ее въ выраженіе перваго неизвѣстнаго, чрезъ что получимъ его величину.*

(*) Сіе называется x въ *функціи* y; *функціею* y называется выраженіе его величины.

Примѣръ 1.

Пусть будутъ два уравненія $2x+3y=70$, $4x+5y=130$; изъ перваго вывожу $x=\frac{70-3y}{2}$, изъ втораго $x=\frac{130-5y}{4}$.

Слѣдовательно $\frac{130-5y}{4}=\frac{70-3y}{2}$, уничтоживъ же знаменателей будетъ $260-10y=280-12y$, или $12y-10y=280-260$. И такъ $2y=20$, $y=\frac{20}{2}=10$. Вставя сію величину въ одно изъ выраженій x, будетъ $x=\frac{70-3y}{2}=\frac{70-30}{2}=\frac{40}{2}=20$.

Въ самомъ дѣлѣ $2x+3y=40+30=70$, и $4x+5y=80+50=130$.

Примѣръ 2.

Рѣшить два уравненія, $\frac{2x}{3}+\frac{4y}{5}=64$ и $\frac{5x}{6}+\frac{9y}{10}=77$?

Уничтоживъ знаменателей будетъ

$10x+12y=960$, и $50x+54y=4620$;

Вывожу изъ перваго $x=\frac{960-12y}{10}$, а изъ втораго $x=\frac{4620-54y}{50}$.

Слѣдовательно $\frac{960-12y}{10}=\frac{4620-54y}{50}$; уничтожа въ семъ уравненіи знаменателей, получимъ $48000-600y=46200-540y$, или $60y=1800$; слѣдовательно $y=\frac{1800}{60}=30$. Вставя 30 вмѣсто y въ выраженіе x, получимъ $x=\frac{960-12\cdot30}{10}=\frac{960-360}{10}=\frac{600}{10}=60$.

Въ самомъ дѣлѣ $\frac{2\cdot60}{3}+\frac{4\cdot30}{5}=64$ и $\frac{5\cdot60}{6}+\frac{9\cdot30}{10}=77$.

Примѣръ 3.

Рѣшить два уравненія: $7ax=4b$, и $2cx+3dy=4c$? Изъ перваго вывожу $x=\frac{4b}{7a}$, изъ втораго же $x=\frac{4c-3dy}{2c}$. Слѣдовательно $\frac{4b}{7a}=\frac{4c-3dy}{2c}$; уничтожа знаменателей получимъ $8bc=28ac-21ady$, и $21ady=28ac-8bc$. И такъ $y=\frac{28ac-8bc}{21ad}$.

136. Кромѣ показаннаго способа для рѣшенія двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, есть еще другіе.

Пусть будутъ два уравненія

I. $ax+by=c$; II. $a'x+b'y=c'$

Способъ I. Вывожу изъ перваго уравненія величину x въ y и извѣстныхъ, нахожу $x=\frac{c-by}{a}$.

Вставя сію величину x во второе уравненіе, будетъ $a'\times\frac{c-by}{a}+b'y=c'$, или $\frac{a'c-a'by}{a}+b'y=c'$; уничтожа знеменателя получимъ $a'c-a'by+ab'y=ac'$, или $(ab'-a'b)y=ac'-a'c$.

Слѣдовательно $y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$.

Чтобъ получить величину x, вставляю въ уравненіе $x=\frac{c-by}{a}$ вмѣсто y его величину $\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$, нахожу

$$x=\frac{c-b\times\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}}{a}=$$
$$=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}.$$

137. Способъ II. Чтобъ получить величину y, множу первое уравненіе на a', а второе на a, отъ сего превратятся они въ $aa'x+a'by=a'c$ и

$aa'x+ab'y=ac'$; потомъ вычитаю изъ втораго уравненія первое, разность ихъ будетъ $ab'y-a'by=ac'-a'c$, или $(ab'-a'b)y=ac'-a'c$;

Слѣдовательно $y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$.

Но чтобъ опредѣлить величину x, то множу сперва первое на b' а второе на b, и получаю $ab'x+bb'y=b'c$, $a'bx+bb'y=bc'$; потомъ, вычтя второе уравненіе изъ перваго, будетъ $ab'x-a'bx=b'c-bc'$, или $(ab'-a'b)x=b'c-bc'$, слѣдовательно $x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$.

138. Способъ III. Чтобъ опредѣлить величину y, сперва дѣлю первое уравненіе на a, а второе на a', нахожу $x+\frac{by}{a}=\frac{a}{b}$, $x+\frac{b'y}{a'}=\frac{c'}{a'}$, потомъ вычитаю первое изъ втораго, и получаю $\frac{b'y}{a'}-\frac{by}{a}=\frac{c'}{a'}-\frac{c}{a}$, или $\left(\frac{b'}{a'}-\frac{b}{a}\right)y=\frac{c'}{a'}-\frac{c}{a}$, или $(ab'-a'b)y=ac'-a'c$. Слѣдовательно $y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$.

Но чтобъ получить величину x, дѣлю первое уравненіе на b, а второе на b', будетъ $\frac{a}{b}x+y=\frac{c}{b}$, $\frac{a'}{b'}x+y'=\frac{c'}{b'}$; потомъ вычитаю изъ перваго второе $\left(\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}\right)x=\frac{c}{b}-\frac{c'}{b'}$, или $(ab'-a'b)x=b'c-bc'$;

Слѣдовательно $x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$.

139. Когда оба неизвѣстныхъ не въ обѣихъ уравненіяхъ находятся вмѣстѣ, тогда рѣшеніе сихъ уравненій гораздо легче.

На примѣръ пусть будутъ два уравненія:

$7ax=4b$, $2cx+3dy=4c$.

Сначала вывожу изъ перваго уравненія величину x, получаю $x = \frac{4b}{7a}$, потомъ величину x вывожу изъ втораго уравненія и нахожу $x = \frac{4c-3dy}{2c}$. Сравнивъ обѣ величины x, будетъ

$$\frac{4b}{7a} = \frac{4c-3dy}{2c}$$

или $4b.\ 2c = (4c-3dy)7a$

или $8bc = 28ac - 21ady$; по перенесеніи членовъ будетъ

$$21ady = 28ac - 8bc.$$

Слѣдовательно $y = \frac{28ac-8bc}{21ad}$.

140. Даны три уравненія $ax+by+cz=d$, $a'x+b'y+c'z=d'$, $a''x+b''y+c''z=d''$, опредѣлить x, y и z?

Вывожу изъ каждаго величину x изображенную въ y, z и постоянныхъ количествахъ.

Изъ 1го уравненія получаю $x = \frac{d-by-cz}{a}$,

Изъ 2го —— —— $x = \frac{d'-b'y-c'z}{a'}$,

Изъ 3го —— —— $x = \frac{d''-b''y-c''z}{a''}$.

Сравнивъ первую величину x со второю, вторую съ третьею получаю два уравненія съ двумя неизвѣстными.

$$\frac{d-by-cz}{a} = \frac{d'-b'y-c'z}{a'},\quad \frac{d'-b'y-c'z}{a'} = \frac{d''-b''y-c''z}{a''},$$

которыя рѣшаю по правиламъ уравненій съ двумя неизвѣстными, то есть

$a'd-a'by-a'cz=ad'-ab'y-ac'z$, $a''d'-a''b'y-a''c'z=a'd''-a'b''y-a'c''z$

$$ab'y-a'by=ad'-a'd+a'cz-ac'z,$$
$$a'b''y-a''b'y=a'd''-a''d'+a''c'z-a'c''z$$

$$y = \frac{ad'-a'd+a'cz-ac'z}{ab'-a'b},\quad y = \frac{a'd''-a''d'+a''c'z-a'c''z}{a'b''-a''b'}.$$

И такъ $\frac{ad'-a'd+a'cz-ac'z}{ab'-a'b} = \frac{a'd''-a''d'+a''c'z-a'c''z}{a'b''-a''b'}$,

откуда вывожу

$$z = \frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

вставивъ величину сію въ одно изъ выраженій y, получаю

$$y = \frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

Вставя величины y и z въ выраженіе x, нахожу

$$x = \frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

141. Вотъ примѣръ въ числахъ.

$2x+3y+4z=160$, $5x-6y+7z=100$, $8x-9y+10z=160$.

Изъ 1го уравненія вывожу $x = \frac{160-3y-4z}{2}$,

Изъ 2го —— —— $x = \frac{100+6y-7y}{5}$,

Изъ 3го —— —— $x = \frac{160+9y-10z}{8}$,

И такъ $\frac{160-3y-4z}{2} = \frac{100+6y-7z}{5}$,

$$\frac{100+6y-7z}{5} = \frac{160+9y-10z}{8}.$$

$800-15y-20z=200+12y-14z$, $800+48y-56z=800+45y-50z$.

$27y=600-6z$, $3y=6z$

$y = \frac{600-6z}{27}$, $y = \frac{6z}{3}$.

Слѣдовательно $\frac{6z}{3} = \frac{600-6z}{27}$

$$182z = 1800 - 18z$$
$$200z = 1800$$
$$z = \frac{1800}{200} = 9$$

И такъ $y = \frac{6z}{3} = \frac{6 \times 9}{3} = \frac{54}{3} = 18$; $x = \frac{160-3y-4z}{2} =$

$$\frac{160-3 \times 18-4 \times 9}{2} = \frac{160-54-36}{2} = \frac{160-90}{2} = \frac{70}{2} = 35.$$

И такъ, *чтобъ рѣшить три уравненія съ тремя неизвѣстными, должно* 1[е] *изъ каждаго уравненія вывесть величину какого нибудь неизвѣстнаго, изображенную чрезъ прочія неизвѣстныя и постоянныя количества; потомъ* 2[е] *изъ трехъ выраженій одного неизвѣстнаго составить два уравненія и рѣшить ихъ по правиламъ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными; наконецъ* 3[е] *нашедши величину одного изъ неизвѣстныхъ, постепенно употреблять ее для опредѣленія прочихъ.*

142. Для рѣшенія трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными легко также могутъ быть принаровлены способы въ членахъ 136, 137, 138, означенные.

Мы принаровимъ здѣсь только третій, потому что онъ удобнѣе можетъ быть употребляемъ.

Опредѣлить x, y и z помощію трехъ уравненій

$$2x + 3y + 4z = 29 \text{ - - - - } (1)$$
$$5x - 2y + z = 8 \text{ - - - - } (2)$$
$$3x + 8y - 6z = 6 \text{ - - - - } (3)$$

Чтобъ вывесть x изъ сихъ уравненій, для сего первое уравненіе множу на 5×3, произведеніе коеффиціентовъ x во второмъ и третьемъ уравненіи находящагося; второе уравненіе множу на 2×3, третіе на 2×5. И такъ получаю

$$30x + 45y + 60z = 435 \text{ - - - - } (4)$$
$$30x - 12y + 6z = 48 \text{ - - - - } (5)$$
$$30x + 80y - 60z = 60 \text{ - - - - } (6)$$

Вычтя пятое уравненіе изъ четвертаго, а шестое изъ пятаго, будутъ два уравненія:

$$57y + 54z = 387 \text{ . . . } (7)$$
$$-92y + 66z = -12 \text{ . . . } (8)$$

Чтобъ вывесть y изъ сихъ уравненій, множу для сего уравненіе (7) на -92, а (8) на 57, получаю

$$-5244y - 4968z = -35604 \text{ - - - - } (9)$$
$$-5244y + 3762z = -684 \text{ - - - - } (10)$$

Вычтя девятое уравненіе изъ десятаго, будетъ

$$8730z = 34920$$

Слѣдовательно $z = \frac{34920}{8730} = 4$.

Такимъ же образомъ прямо можно опредѣлить x и y; но знавши z можно опредѣлить y помощію 7[го] уравненія, вставя въ него величину z, то есть

$$y = \frac{387-54z}{57} = \frac{387-216}{57} = \frac{171}{57} = 3.$$

Вставя въ первое уравненіе величины y и z опредѣлимъ x, то есть будетъ

$x = \frac{29-3y-4z}{2}\ \frac{29-9-16}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

143. Ежели всѣ три неизвѣстныя количества не находятся вмѣстѣ въ каждомъ изъ уравненій, тогда ихъ рѣшеніе гораздо легче.

На примѣръ пусть будутъ три уравненія:

$10x - 9y = 550,\ 8x - 7z = 625,\ 6y - 5z = 175.$

Изъ перваго вывожу $x = \frac{550+9y}{10}$.
Изъ втораго вывожу $x = \frac{625+7z}{8}$.

Сравнивъ обѣ величины x получаю уравненіе

$$\frac{550+9y}{10} = \frac{625+7z}{8},$$

изъ котораго вывожу $y = \frac{1850+70z}{72}$.
Изъ даннаго третьего $y = \frac{175+5z}{6}$

Сравнивъ обѣ величины y получаю уравненіе.

$$\frac{1850+70z}{72} = \frac{175+5z}{6},$$

изъ котораго вывожу $z = 25$.

Третіе уравненіе даетъ величину y; ибо $y = \frac{175+5z}{6} = \frac{175+125}{6} = 50$. Второе даетъ x; ибо $x = \frac{625+7z}{8} = \frac{625+175}{8} = 100$.

144. Опредѣлить x, y, z, u помощію четырехъ уравненій?

$$x + 2y + 3z + 4u = 20$$
$$5x - 6y + 7z - 8u = 8$$
$$9x - 10y - 11z + 12u = -4$$
$$13x + 14y - 15z - 16u = 48$$

Изъ каждаго уравненія вывожу величину x и получаю.

1е. $x = 20 - 2y - 3z - 4u;$

2е. $x = \frac{8 + 6y - 7z + 8u}{5}$

3е. $x = \frac{10y + 11z - 12u - 4}{9};$

4е. $x = \frac{48 - 14y + 15z + 16u}{13}.$

Теперь сравнивая первую величину x, съ каждою изъ прочихъ, произойдутъ три уравненія:

$$20 - 2y - 3z - 4u = \frac{8 + 6y - 7z - 8u}{5}$$
$$20 - 2y - 3z - 4u = \frac{10y + 11z - 12u - 4}{9}$$
$$20 - 2y - 3z - 4u = \frac{48 - 14y + 15z + 16u}{13}.$$

Отсюда вывожу

1е. $y = \frac{92 - 8z - 28u}{16} = \frac{23 - 2z - 7u}{4}$

2е. $y = \frac{184 - 38z - 24u}{28} = \frac{92 - 19z - 12u}{14}$

3е. $y = \frac{212 - 54z - 68u}{14} = \frac{106 - 27z - 34u}{7}$

Сравнивъ первую величину y со второю и третьею будетъ:

$$\frac{23 - 2z - 7u}{4} = \frac{92 - 19z - 20u}{14}$$
$$\frac{23 - 2z - 7u}{4} = \frac{106 - 27z - 34u}{7}$$

Отсюда получаю

1е. $z = \frac{23 + 25u}{24}$

2е. $z = \frac{148 - 47u}{48}$

И такъ $\frac{23 + 25u}{24} = \frac{148 - 47u}{48}$

Откуда вывожу $u = 1$. Вставя сію величину въ $z = \frac{23+25u}{24}$, получаю $z = 2$. И такъ $y = \frac{23-2z-7u}{4} = \frac{23-4-7}{4} = 3$; $x = 20-2y-3z-4u = 20-6-6-4 = 4$.

Формулы для рѣшенія уравненій первой степени съ двумя и тремя неизвѣстными.

145. 1^е. Пусть будутъ два уравненія:

$ax + by = c$; и $a'x + b'y = c'$.

a, a', b, b', c, c', суть какія нибудь извѣстныя количества; вотъ формулы:

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b},\quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

2^е. Пусть будутъ три уравненія.

$$a\,x + by + cz = d;$$
$$a'\,x + b'y + c'z = d';$$
$$a''x + b''y + c''z = d'';$$

Изъ сихъ уравненій произойдутъ слѣдующія формулы:

$$x = \frac{b'c''d - b''c'd + b''cd' - bc''d' + bc'd'' - b'cd''}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c},$$

$$y = \frac{ac''d' - ac'd'' + ac'd'' - a'c''d + a''c'd - a''cd'}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c},$$

$$z = \frac{ab'd'' - ab''d' + a'b''d - a'bd'' + a''bd' - a''b'd}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c}.$$

Повѣрка сихъ формулъ.

Пусть будутъ два уравненія:

$3x - 2y = 40$ и $2x - 3y = 10$.

Ежели разрѣшимъ ихъ по даннымъ правиламъ, то найдемъ $x = 20$, $y = 10$. Посмотримъ общіе формулы дадутъ ли тѣ же результаты?

Въ семъ примѣрѣ: $a = 3$; $b = -2$, $c = 40$; $a' = 2$; $b' = -3$; $c' = 10$. И такъ

$$x = \frac{-3 \times 40 + 10 \times 2}{3 \times -3 - 2 \times -2} = \frac{-120 + 20}{-9 + 4} = \frac{-100}{-5} = 20;$$

$$y = \frac{3.10 - 2.40}{3 \times -3 - 2 \times -2} = \frac{30 - 80}{-9 + 4} = \frac{-50}{-5} = 10.$$

Величины тѣ же.

Пусть будутъ даны три уравненія:

$$x - 2y + 3z = 3;$$
$$2x - 3y - 9z = 1;$$
$$3x - 5y - 4z = 6.$$

Здѣсь $a = 1$; $a' = 2$; $a'' = 3$; $b = -2$; $b' = -3$; $b'' = -5$; $c = 3$; $c' = -9$; $c'' = -4$; $d = 3$; $d' = 1$ и $d'' = 6$.

Расчисливъ разныя произведенія, составляющія числителя и знаменателя величины каждаго неизвѣстнаго количества, найдемъ:

$$x = \frac{36 - 135 - 15 - 8 + 108 + 54}{12 - 45 - 30 - 16 + 54 + 27} = \frac{40}{2} = 20.$$

$$y = \frac{-4 + 54 + 36 + 24 - 81 - 9}{12 - 45 - 30 - 16 + 54 + 27} = \frac{20}{2} = 10.$$

$$z = \frac{-18 + 5 - 30 + 24 - 6 + 27}{12 - 45 - 30 - 16 + 54 + 27} = \frac{2}{2} = 1.$$

Сіи величины удовлетворяютъ тремъ уравненіямъ; что служитъ повѣркою сихъ формулъ.

Доказательство предыдущихъ формулъ.

Пусть будутъ два уравненія:

$$ax + by = c;\quad a'x + b'y = c'.$$

Помножимъ первое на m, произвольное какое нибудь количество, получимъ:

$$amx + bmy = mc;$$

Вычтимъ изъ него второе уравненіе; разность будетъ:

$$x\,(am - a') + y\,(bm - b') = cm - c'.$$

Предположимъ $am - a' = o$;

Слѣдовательно $m = \frac{a'}{a}$, $y = \frac{cm - c'}{bm - b'} = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$,

Потомъ пусть будетъ $bm - b' = o$;

Слѣдовательно $m = \frac{b'}{b}$, $x = \frac{cm - c'}{am - a'} = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$.

Возьмемъ теперь три уравненія:

$$ax + by + cz = d;$$
$$a'x + b'y + c'z = d';$$
$$a''x + b''y + c''z = d'';$$

Помножимъ первое на m, а второе на n, получимъ

$$amx + bmy + cmz = md;$$
$$a'nx + b'ny + c'nz = nd';$$

Изъ суммы сихъ двухъ послѣднихъ уравненій вычтимъ третье начальное уравненіе:

$$x\,(am + a'n - a'') + y\,(bm + b'n - b'') + z\,(cm + c'n - c'') = dm + d'n - d''.$$

Приравнявъ къ нулю коефиціенты y и z, получимъ три новыя уравненія:

$$x\,(am + a'n - a'') = dm + d'n - d'';$$
$$bm + b'n - b'' = o;$$
$$cm + c'n - c'' = o.$$

Слѣдовательно $x = \frac{dm + d'n - d''}{am + a'n - a''}$; $m = \frac{b'c'' - b''d}{b'c - c'b}$;

$$n = \frac{b''c - bc''}{b'c - c'b}.$$

И такъ $x = \frac{b'c''d - b''c'd + b''cd' - bc''d' + bc'd'' - b'cd''}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c}$;

Прировняемъ къ нулю коеффиціенты x и z, тогда три условныя уравненія перемѣнются въ слѣдующія:

$$am + a'n - a'' = o;$$
$$y\,(bm + b'n - b'') = dm + d'n - d'';$$
$$cm + c'n - c'' = o.$$

Изъ оныхъ слѣдуетъ $m = \frac{a''c' - a'c''}{ac' - a'c}$; $n = \frac{a''c - ac''}{ac' - a'c}$;

$$y = \frac{dm + d'n - d''}{bm + b'n - b''} = \frac{ac''d' - ac'd'' + a'cd'' - a'c''d + a''c'd - a''cd'}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c}.$$

Прировняемъ наконецъ къ нулю коеффиціенты x и y, тогда будетъ:

$$am + a'n - a'' = o;\quad bm + b'n - b'' = o;$$
$$z\,(cm + c'n - c'') = dm + d'n - d'';$$

$$m = \frac{a''b' - a'b''}{ab' - a'b};\quad n = \frac{ab'' - a''b}{ab' - a'b};$$

наконецъ

$$z = \frac{dm + d'n - d''}{cm + c'n - c''} = \frac{ab'd'' - ab''d' + a'b''d - a'bd'' + a''bd' - a''b'd}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c};$$

ГЛАВА XI.

О рѣшеніи вопросовъ.

Вопросъ 1.

146. Купецъ, желая узнать долгъ прикащика, получилъ въ отвѣтъ, что естьли бы онъ отдалъ половину, потомъ треть и наконецъ 12ю часть, то все еще остался бы долженъ 630 рублей; спрашивается весь долгъ?

Положимъ, что долгъ прикащика составляетъ 1200 рублей, тогда бы половина была 600, треть 400, 12я часть 100; но все это съ 630 рублями составитъ 1730 рублей, а не 1200 рублей. И такъ предположеніе наше ложно; но при всемъ томъ, назвавши долгъ x, и поступивши подобнымъ образомъ, будетъ

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + 630.$$

Уравненіе сіе рѣшить очень легко. Въ самомъ дѣлѣ, приведя къ знаменателю 12 будетъ:

$$\frac{12x}{12} = \frac{6x}{12} + \frac{4x}{12} + \frac{x}{12} + \frac{7560}{12},$$

или $12x = 6x + 4x + x + 7560$.

Откуда $x = 7560$.

И такъ прикащикъ долженъ 7560 рублей. Въ самомъ дѣлѣ $7560 = \frac{7560}{2} + \frac{7560}{3} + \frac{7560}{12} + 630$.

И такъ сіе дѣлопроизводство намъ показываетъ, что *для изображенія вопроса уравненіемъ, должно надъ неизвѣстнымъ количествомъ сдѣлать всѣ тѣ дѣйствія; какія бы мы сдѣлали съ сысканнымъ количествомъ, желая его повѣрить.*

Вопросъ 2.

147. Найти число, котораго треть и четверть вмѣстѣ составляютъ 63?

Пусть число сіе x, то будетъ:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 63$$
$$4x + 3x = 12.63$$
$$7x = 12.63$$
$$x = \frac{12.63}{7}$$
$$x = 12.9$$
$$x = 108.$$

Въ самомъ дѣлѣ $\frac{108}{3} + \frac{108}{4} = 36 + 27 = 63$.

Замѣтимъ, что естьли бы требовалось найти число, котораго бы пятая и шестая часть вмѣстѣ сложенныя равнялись 22, то нужно снова изобразить уравненіе и рѣшить его; такимъ образомъ:

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{6} = 22$$
$$6x + 5x = 30.22$$
$$11x = 30.22$$
$$x = \frac{30.22}{11} = 30.2$$
$$x = 60.$$

И такъ, чтобъ въ одинъ разъ рѣшить оба сіи вопроса и всѣ съ ними подобные, нужно числовыя величины изобразить буквами a, b, c... какъ способными представлять всякое число. Слѣдовательно для сего надлежитъ рѣшить сей вопросъ: Найти число, которое будучи раздѣлено на a и b, сумма частныхъ равнялась бы s. Вопросъ сей изобразиться такъ:

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = s.$$

Откуда $bx + ax = abs$

$(a+b)x = abs.$

Слѣдовательно $x = \frac{abs}{a+b}$.

Вотъ всеобщее выраженїе искомаго количества для всѣхъ вопросовъ одного роду съ предыдущими; чтобъ имѣть числовую величину неизвѣстнаго количества, должно только вставить въ формулу вмѣсто буквъ числовыя величины ихъ.

Вопросъ 3.

148. Отецъ имѣетъ отъроду 40 лѣтъ, а сынъ 12; спрашивается чрезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ втрое старшѣ сына?

Говорю чрезъ x лѣтъ отецъ будетъ имѣть $40+x$, а сынъ $12+x$; но по условїю вопроса $40+x$ втрое должно быть $12+x$; слѣдовательно.

$$40+x=3(12+x),$$
$$40+x=36+3x,$$
$$2x=4,$$
$$x=2.$$

И такъ чрезъ два года отецъ втрое будетъ старшѣ сына. Въ самомъ дѣлѣ $42=3.14$

Вопросъ 4.

149. Найти число, которое будучи раздѣлено на a и b даетъ два частныя, коихъ разность d?

Назвавши искомое x, будетъ

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = d$$
$$bx - ax = abd$$
$$(b-a)x = abd.$$

Откуда $x = \frac{abd}{b-a}$.

Положивши $a=3$, $b=8$, $d=25$; будетъ $x = \frac{3 \cdot 8 \cdot 25}{8-3} = 120.$

То есть теперь мы тотчасъ нашли, что число искомое есть 120; въ самомъ дѣлѣ, взявши его третью и осьмую часть, разность ихъ будетъ 25: вотъ польза формулъ.

Вопросъ 5.

150. Нѣсколько солдатъ получили въ награду неизвѣстную сумму, такъ что первой A взялъ изъ нее 10 рублей и 6ю часть остатка; второй B взялъ 20 рублей и 6ю часть остатка; третїй C взялъ 30 рублей и 6ю часть остатка; и такъ далѣе до послѣдняго, которой взявши всё остальное, вышло что всѣ солдаты получили поравну. Спрашивается сколь велика дана была сумма, число солдатъ и каждаго часть?

Пусть будетъ розданная сумма x, то A взявши 10 рублей, остатокъ его будетъ $x-10$, а шестая часть $\frac{x-10}{6}$. И такъ часть $A=10+\frac{x-10}{6}$, или $=\frac{x+50}{6}$.

B беретъ 20 рублей, то послѣ его останется $x - \frac{x+50}{6} - 20 = \frac{5x-170}{6}$, а шестая часть $= \frac{5x-170}{36}$. И такъ часть $B=20+\frac{5x-170}{36}$, или $\frac{5x+550}{36}$. Но такъ какъ части всѣ равныя, то будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{x+50}{6} = \frac{5x+550}{36},$$

$$6x + 300 = 5x + 550,$$

Откуда $x = 250$.

И такъ роздано было 250 рублей. Часть же каждаго $= \frac{x+50}{6} = \frac{250+50}{6} = \frac{300}{6} = 50$ рублямъ; раздѣливши 250 рублей на 50, получимъ 5, число солдатъ.

Вопросъ 6.

151. Одинъ фонтанъ наполняетъ бассейнъ въ a часовъ; другой же можетъ наполнить въ b часовъ; спрашивается во сколько времени вмѣстѣ они могутъ наполнить?

Принявши бассейнъ за единицу, то первымъ фонтаномъ въ часъ количество воды доставляемое изобразится $\frac{1}{a}$; и слѣдовательно въ x часовъ $x \times \frac{1}{a}$, или $\frac{x}{a}$. Вторымъ въ часъ доставляемое количество воды будетъ $\frac{1}{b}$; и слѣдовательно въ x часовъ $x \times \frac{1}{b}$, или $\frac{x}{b}$. И такъ обоими количество воды будетъ доставлено въ x часовъ

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b}.$$

Но такъ какъ количество сіе должно наполнить бассейнъ, то будетъ уравненіе

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1.$$

Откуда $bx + ax = ab$,

$$(a+b)x = ab.$$

Слѣдовательно $x = \frac{ab}{a+b}$.

На примѣръ естьли положимъ, что первой фонтанъ одинъ наполняетъ въ 8 часовъ, а второй въ 6 часовъ, то вставя въ найденную формулу 8 вмѣсто a, 6 вмѣсто b, найдемъ

$$x = \frac{8.6}{8+6} = \frac{48}{14} = 3\tfrac{3}{7}.$$

То есть вмѣстѣ оба фонтана наполнятъ бассейнъ въ $3\frac{3}{7}$ часа.

Вопросъ 7.

152. Мясникъ купилъ на 318 рублей 10 копеекъ 5 быковъ, 2 коровы, 10 телятъ, 15 барановъ и 22 ягненка; за быка заплатилъ 16 рублями дороже, нежели за корову; теленокъ обошелся въ 8 разъ дешевлѣ коровы, а въ 2 раза дороже барана; каждой ягненокъ стоилъ 80 копѣекъ; спрашивается что стоитъ каждая скотина?

Пусть цѣна одного барана	$= x$	рубл.	
Цѣна одного теленка будетъ	$= 2x$	—	
— Одной коровы. . .	$= 16x$	—	
— Одного быка .	$= 16x + 16$	—	
За 5 быковъ будетъ заплачено	$80x+80$		
— 2 Коровы.	$32x$		
— 10 Теленковъ. . . .	$20x$		
— 15 Барановъ.	$15x$		
— 22 Ягненга. . . .	17, 60		

Сумма $147x+97, 60$, которая должна быть равна 318 рублямъ 10 копѣйкамъ. И такъ наше уравненіе будетъ:

$$147x+97,60=318, 10$$
$$147x=220, 50$$
$$x= 1, 50$$

И такъ:

Баранъ стоитъ, .	1	руб.	50 коп.
Теленокъ. . .	3	—	
Корова. . . .	24	—	
Быкъ. . . .	40	—	

И такъ заплачено:

За 5 Быковъ. .	200	—	
— 2 Коровы. .	48	—	
— 10 Теленковъ. .	30	—	
— 15 Барановъ. .	22	—	50 коп.
— 22 Ягненка. .	17	—	60 —
Всего	318	руб.	10 коп.

Вопросъ 8.

153. Я обѣщалъ слугѣ 80 рублей жалованья въ годъ и платье; но по прошествіи семи мѣсяцовъ онъ меня оставилъ, получа платье и 35 рублей денегъ: спрашивается сколько положено за платье?

Положимъ, что платье стоитъ x, посему за 7 мѣсяцовъ должно заплатить $7\left(\frac{80+x}{12}\right)$. Но онъ дѣйствительно получилъ $35+x$, почему

$$7\left(\frac{80+x}{12}\right) = 35+x.$$

И потому будетъ

$$7\,(80+x) = (35+x)\,12\,,$$

то есть:

$$560+7x = 420+12x$$
$$\text{или } 140 = 5x;$$
$$x = 28.$$

И такъ за платье положено 28 рублей.

Вопросъ 9.

154. Нѣкто оставилъ четыремъ сыновьямъ 12800 рублей; по завѣщанію покойнаго часть втораго должна быть вполовину, часть третьяго втретъ, а часть четвертаго вчетверть противъ перваго. Спрашивается сколько каждой получилъ?

Пусть часть перваго x рублей,

то часть втораго будетъ $\frac{x}{2}$ —

——— третьяго $\frac{x}{3}$ —

——— четвертаго $\frac{x}{4}$ —

Слѣдовательно $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 12800$,

$$24x + 12x + 8x + 6x = 307200,$$

$$50x = 307200,$$

$$x = \frac{307200}{50},$$

$$x = 6144.$$

И такъ

1 й. получилъ.	.	6144	рублей.
2 й. ——	. .	3072	—
3 й. ——	. .	2048	—
4 й. ——	. .	1536	—

И того 12800 рублей.

Вопросъ 10.

155. Нѣкто имѣетъ въ обѣихъ рукахъ нѣсколько рублевиковъ; но естьли одинъ изъ правой руки переложитъ въ лѣвую, то будетъ въ каждой поравну; а когда изъ лѣвой переложитъ въ правую два, то въ ней будетъ вдвое противъ лѣвой: спрашивается сколько было рублевиковъ въ каждой рукѣ?

Пусть x въ правой рукѣ, а y въ лѣвой, то будутъ два уравненія

$$x - 1 = y + 1, \quad x + 2 = 2\,(y - 2)$$

Изъ перваго уравненія вывожу

$$x = y + 1 + 1$$

$$x = y + 2.$$

Изъ втораго уравненія слѣдуетъ:

$$x = 2(y - 2) - 2$$

$$x = 2\,y - 4 - 2$$

$$x = 2\,y - 6.$$

Слѣдовательно $2y - 6 = y + 2$

$$2y - y = 2 + 6$$

$$y = 8.$$

Вставя сію величину y въ уравненіе $x = y + 2$, будетъ $x = 8 + 2 = 10$. И такъ въ правой рукѣ было рублевиковъ 10, а въ лѣвой 8.

Вопросъ 11.

156. Найти два числа, коихъ сумма a, разность же b?

Называю большое x, а меньшое y, то будетъ

$$x + y = a; \quad x - y = b.$$

$$x = a - y; \quad x = b + y.$$

Слѣдовательно $b + y = a - y$

$$y + y = a - b$$

$$2y = a - b$$

$y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$; вставя величину сію въ x, получаю $x = a - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

И такъ большое количество равно полсуммѣ сложенной съ полразностію; а меньшое равно полсуммѣ безъ полуразности.

Задача сїя для подобныхъ ей есть общая и легко можетъ быть принаровлена; для сего стоитъ только вставить въ выраженїя x и y, вмѣсто a и b числовыя ихъ величины. На примѣръ: на построенїе конюшни и сарая пошло кирпича 26000, и притомъ на конюшню противъ сарая вышло больше 6000ми кирпичей; спрашивается сколько пошло на конюшню и сколько на сарай?

Здѣсь очевидно $a=26000$, $b=6000$. И такъ назвавши число кирпича, пошедшаго на построенїе конюшни x, а на построенїе сарая y, будетъ.

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{26000}{2} + \frac{6000}{2} = 16000.$$
$$y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{26000}{2} - \frac{6000}{2} = 10000;$$

то есть пошло на построенїе конюшни 16000 кирпичей, а для сарая 10000 кирпичей.

Вопросъ 12.

157. Работникъ у одного хозяина работая 12 дней, изъ коихъ въ 7 дней помогала ему жена, получилъ 74 рубля; спустя нѣсколько времени опять работникъ у хозяина работая 8 дней, изъ которыхъ въ 5 дней помогала ему жена, получилъ 50 рублей; спрашивается сколько выроботали работникъ и его жена порознь?

Называю x дневную цѣну работника
—— y дневную цѣну его жены;
то въ 12 дней работникъ выработалъ $12x$,
а въ 8 . . . . . . $8x$.
Жена же его выработала въ 7 дней $7y$,
а въ 5 дней $5y$.

Слѣдовательно, будемъ имѣть два уравненїя:

$$12x+7y=74;\quad 8x+5y=50.$$
$$y=\frac{74-12x}{7};\quad y=\frac{50-8x}{5}.$$

Теперь получаю одно уравненїе

$$\frac{50-8x}{5} = \frac{74-12x}{7},$$
$$350-56x=370-60x,$$
$$60x-56x=370-350,$$
$$4x=20.$$
$$x=\frac{20}{4},$$
$$x=5.$$

Вставя сїю величину x въ выраженїе

$y=\frac{50-8x}{5}$, получимъ $y=\frac{50-8\cdot5}{5}=\frac{50-40}{5}=\frac{10}{5}=2.$

И такъ работникъ выробатывалъ по 5 рублей на день, а жена его по 2 рубли.

Вопросъ 13.

158. Куплено три сорта чаю, и извѣстно что первой съ половиною другихъ двухъ стоитъ 25 рублей, второй съ третью перваго и третьяго стоитъ 26 рублей, а третїй съ половиною первыхъ двухъ стоитъ 29 рублей. Спрашивается цѣна каждаго сорта?

Пусть цѣна 1го$=x$, 2го$=y$, 3го$=z$, то будемъ имѣть

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=25,\quad y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=26,\quad z+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=29$$
$$2x+y+z=50,\quad 3y+x+z=78,\quad 2z+x+y=58$$
$$x=\frac{50-y-z}{2},\quad x=78-3y-z,\quad x=58-y-2z$$

Откуда $\frac{50-y-z}{2}=78-3y-z, 58-y-2z=78-3y-z;$
$$50-y-z=156-6y-2z,\quad 3y-y=78-58-z+2z;$$
$$6y-y=156-50-2z+z,\quad 2y=20+z;$$
$$5y=106-z,\qquad y=\frac{20+z}{2}.$$
$$y=\frac{106-z}{5}.$$

Отсюда $\frac{20+z}{2}=\frac{106-z}{5}$,
$$100+5z=212-2z,$$
$$5z+2z=212-100,$$
$$7z=112,$$
$$z=\frac{112}{7},$$
$$z=16..$$

Слѣдовательно $y=\frac{+z}{2}=\frac{20+16}{2}=\frac{36}{2}=18.$
$$x=58-y-2z=58-18-2.16=58-18-32,$$
$$x=58-50=8.$$

И такъ первой сортъ стоилъ 8, второй 18, а третій 16 рублей.

Вопросъ 14.

159. Куплено три ящика винъ; въ первомъ находилось 30 бутылокъ мадеры, 20 малаги и 10 венгерскаго, за все заплачено 230 рублей. Во второмъ было 15 мадеры, 6 малаги, и 12 венгерскаго, а заплачено 138 рублей. Въ третьемъ находилось 10 мадеры, 5 малаги и 4 венгерскаго,

а заплачено 75 рублей. Спрашивается цѣна каждаго вина?

Пусть будетъ x цѣна мадеры,
— — y — малаги,
— — z — венгерскаго;

то 30 бутылокъ мадеры стоятъ $30x$,
20 —— малаги — $20y$,
10 —— венгерскаго — $10z$; а все вмѣстѣ по первому условію 230 рублей, то есть будетъ уравненіе:

$$30x+20y+10z=230.$$

По второму условію

15 бутылокъ мадеры стоятъ $15x$,
6 — малаги — $6y$,
12 — венгерскаго — $12z$; и слѣдовательно все 138 рублей, то есть:

$$15x+6y+12z=138.$$

По третьему условію

10 бутылокъ мадеры стоятъ $10x$,
5 — малаги — $5y$,
4 — венгерскаго — $4z$; и слѣдовательно все вмѣстѣ 75 рублей, то есть:

$$10x+5y+4z=75.$$

И такъ вопросъ данной можетъ быть изображенъ тремя уравненіями:

$$30x+20y+10z=230,$$
$$15x+6y+12z=138;$$
$$10x+5y+4z=75.$$

Или по раздѣленіи всѣхъ членовъ перваго уравненія на 10, а втораго на 3

$$3x+2y+z=23,$$
$$5x+2y+4z=46,$$
$$10x-5y+4z=75.$$

Вывожу изъ перваго уравненія $z=23-3x-2y$, вставляю величину сію во второе и третье уравненія, отъ чего они перемѣняются въ

$$5x+2y+92-12x-8y=46,$$
$$10x+5y+92-12x-8y=75;$$
или
$$92-7x-6y=46, \text{ (L)}$$
$$92-2x-3y=75. \text{ (B)}$$

Вывожу изъ уравненія (L)

$$y = \frac{92-46-7x}{6},$$
или
$$y = \frac{46-7x}{6}.$$

Вставя величину сію y въ (B) получаю

$$92-2x-3\times\frac{46-7x}{6}=75,$$
$$92-2x-\frac{46-7x}{2}=75,$$
$$184-4x-46+7x=150.$$
$$138+3x=150,$$
$$3x=150-138,$$
$$x=\frac{12}{3},$$
$$x=4.$$

Слѣдовательно вставя величину сію въ выраженіе y, получимъ $y=\frac{46-7x}{6}=\frac{46-7\times4}{6}=\frac{46-28}{6}=\frac{18}{6}=3$.

Вставя величины x и y въ выраженіе z, получимъ

$$z=23-3x-2y=23-3\times4-2\times3=23-12-6=5.$$

И такъ стоитъ бутылка мадеры - 4 рубли
— — — малаги - 3 —
— — — венгерскаго 5 —

Вопросъ 15.

160. Три фрегата, стоя близь непріятельской батареи, вознамѣрились для овладѣнія оною высадить дессанту 100 человѣкъ; но какъ ни на одномъ изъ нихъ нѣтъ довольнаго числа солдатъ, то въ дополненіе онаго числа первой фрегатъ требуетъ отъ третьяго половину его солдатъ и еще 18 человѣкъ; второй фрегатъ, съ тѣмъ же условіемъ, проситъ у перваго треть его солдатъ и еще 5 человѣкъ; а третій у втораго четверть его солдатъ и еще 6 человѣкъ. Спрашивается число солдатъ на каждомъ фрегатѣ?

Положимъ, что на первомъ фрегатѣ было x солдатъ; на второмъ y; на третьемъ z. Условія вопроса даютъ сіи три уравненія:

$$x+\frac{z}{2}+18=100;$$
$$y+\frac{x}{3}+5=100;$$
$$z+\frac{y}{4}+6=100.$$

Изъ перваго имѣемъ $x=\frac{164-z}{2}$; изъ втораго $x=285-3y$. Такъ какъ третіе уравненіе не содержитъ x, то возмемъ изъ него величину $y=376-4z$; тогда будемъ имѣть два уравненія:

$$\frac{164-z}{2}=285-3y;$$
$$y=376-4z.$$

Выведя изъ перваго уравненія величину $y = \frac{406+z}{6}$, вопросъ приводится къ одному уравненію $\frac{406+z}{6} = 376 - 4z$, которое даетъ $z = 74$. Посему $y = 376 - 4z = 80$; $x = 285 - 3y = 45$.

Вопросъ 16.

161. Имѣется три сорта пушечнаго пороха: 1й состоитъ изъ 60 фунтовъ селитры, 20 сѣры и 20 уголья. 2й состоитъ изъ 80 фунтовъ селитры, 10 сѣры и 10 уголья. 3й состоитъ изъ 69 фунтовъ селитры, 18 сѣры и 13 уголья. Требуется изъ онаго сдѣлать порохъ, который бы на 100 фунтовъ содержалъ 75 фунтовъ селитры, 13 сѣры и 12 уголья. Спрашивается сколько каждаго сорта взять надлежитъ?

Пусть 1го взято x фунтовъ,
— 2го — y —
— 3го — z — ;

то будутъ слѣдующія уравненія:

$$\text{I. } 60x + 80y + 69z = 7500,$$
$$\text{II. } 20x + 10y + 18z = 1300,$$
$$\text{III. } 20x + 10y + 13z = 1200.$$

Три неизвѣстныя количества x, y, z, всего удобнѣе найдутся симъ образомъ: когда отъ втораго отнимемъ третіе, то получимъ:

$5z = 100$; откуда выходитъ $z = 20$.

Когда изъ перваго вычтемъ второе взятое три раза, то получимъ:

$$50y + 15z = 3600.$$

Откуда выходитъ $y = 66$.

Вставя сіи величины y и z въ третіе уравненіе, будетъ:

$$20x + 660 + 260 = 1200.$$

По сему $x = 14$.

И такъ надлежитъ взять на 100 фунтовъ $\begin{cases} 1 \text{ сорта } 14 \text{ фунт.} \\ 2 \quad — \quad 66 \quad — \\ 3 \quad — \quad 20 \quad — \end{cases}$

162. Изъ рѣшенія всѣхъ сихъ вопросовъ мы видимъ, что цѣль рѣшенія алгебраическихъ задачь состоитъ въ опредѣленіи искомыхъ количествъ помощію данныхъ, изображая ихъ связь уравненіями: въ семъ то состоитъ вся трудность и сіе пріобрѣтается упражненіемъ. Изобразивши же вопросъ уравненіемъ легко опредѣлить искомыя количества: для сего стоитъ только рѣшить уравненія.

163. Замѣтимъ, что задачи раздѣляются на три рода: *на опредѣленныя*, *неопредѣленныя* и *невозможныя*. Первыя суть тѣ, въ которыхъ для искомаго количества величину находимъ одну; вторыя тѣ, когда для неизвѣстныхъ количествъ находимъ нѣсколько величинъ, выполняющихъ условія задачи; наконецъ третьи суть тѣ, въ коихъ достигаемъ до нелѣпости, на примѣръ: $12 = 5$.

164. Задача тогда опредѣленная, когда она содержитъ столько условій, что есть столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ; въ противномъ случаѣ она неопредѣленная. Случается иногда, что уравненій изъ задачи можно вывесть столько, сколько неизвѣстныхъ, но при всемъ томъ она остается неопредѣленною; это случается, какъ мы ниже увидимъ, тогда когда нѣкоторыя уравненія происходятъ отъ другихъ и непредставляютъ чрезъ то новыхъ условій: таковыя уравненія называются *тождественными*.

Примѣръ невозможнаго вопроса.

165. Найти два числа, коихъ разность равна 8, а разность удвоенныхъ 5?

Назвавши одно x, а другое y, получаю два уравненія:

$$x-y=8,\ 2x-2y=5;$$
$$x=8+y,\quad x=\frac{5+2y}{2}.$$

Откуда $\frac{5+2y}{2}=8+y.$

$$5+2y=16+2y,$$
$$2y-2y=16-5,$$
$$0=11.$$

Такъ какъ 11 не можетъ быть равно нулю, то вопросъ данной есть невозможной.

166. *Отецъ имѣетъ отъ роду 40 лѣтъ, а сынъ 12; спрашивается чрезъ сколько времени сынъ будетъ вчетверо моложѣ отца?*

Говорю чрезъ x лѣтъ, отецъ будетъ имѣть $40+x$, а сынъ $12+x$; по условію вопроса будетъ:

$$40+x=4\ (12+x),$$
$$40+x=48+4x,$$
$$-4x+x=48-40.$$
$$-3x=8,$$
$$3x=-8,$$
$$x=-\tfrac{8}{3}.$$

Величина x означаетъ, что должно вставить въ уравненіе вопроса $-x$ вмѣсто x, отъ чего оно перемѣнится въ $40-x=48-x$:

Разрѣшивши его получимъ $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$. Но измѣнившись уравненіе, измѣняется видъ самаго вопроса: онъ будетъ:

Отецъ имѣетъ отъ роду 40 лѣтъ, а сынъ 12, спрашивается сколько назадъ времени, сынъ былъ вчетверо моложѣ отца?

167. И такъ отрицательные результаты показываютъ намъ нелѣпость вопросовъ; но такъ какъ отрицательныя количества противны положительнымъ, то они означаютъ что вопросъ долженъ взятъ быть въ противную сторону.

На примѣръ:

Найти число x, которое будучи раздѣлено на a, частное $\frac{x}{a}$, дѣлитель a и дѣлимое x равнялось бы s?

Вопросъ сей изобразится уравненїемъ

$$\frac{x}{a}+a+x=s.$$
$$\frac{x}{a}+x=s-a,$$
$$x+ax=a\,(s-a),$$
$$(a+1)\;x=a\,(s-a),$$
$$x=a\left(\frac{s-a}{a+1}\right).$$

Естьли $a>s$, то величина x будетъ отрицательная; такимъ образомъ когда $a=11$, $s=5$, то $x=-5\frac{1}{2}$. И такъ въ вопросъ должно вставить $-x$ вмѣсто x, тогда онъ превратится въ другой, изображенной уравненїемъ

$$11-\frac{x}{11}-x=5,$$

изъ котораго выведу $x=5\frac{1}{2}$.

168. Разсмотримъ въ заключенїе уравненїе съ однимъ неизвѣстнымъ, имѣющее общїй видъ многихъ уравненїй сего рода:

$$ax+b=cx+d.$$

Разрѣшивши его, получимъ

$$x=\frac{d-b}{a-c}.$$

Естьли I^e. $d>b$, $a>c$, то величина x положительная.

II^e. $d<b$, $c<a$, величина x положительная.

III^e. $b>d$, $a>c$, величина x отрицательная и вопросъ въ настоящемъ видѣ несправедливъ; потому что $a>c$, то и $ax>cx$, слѣдовательно $ax+b>cx+d$.

IV. $d>b$; $a<c$, величина x отрицательная и вопросъ невозможенъ. Въ обоихъ сихъ послѣднихъ случаяхъ вопросъ долженъ принять противной видъ.

V. $a=c$, $x=\frac{d-b}{o}$; уравненїе же данное чрезъ сїе обращается $ax+b=ax+d$, или $b=d$; но такъ какъ, судя по выраженїю x, величина d не равна b, то сїе намъ показываетъ, что вопросъ невозможенъ.

Естьли мы у дроби $\frac{m}{n}$ знаменателя n будемъ постепенно уменьшать, на примѣръ будемъ постепенно за n принимать $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и прочее, то количество $\frac{m}{n}$ будетъ увеличиваться въ 2, 100, 1000 и прочее число разъ. *Предѣлъ* какого нибудь количества есть величина, къ которой оно безпрестанно стремится, но равнымъ ей сдѣлаться никогда не можетъ; $\frac{m}{n}$ есть *безконечность*, соотвѣтствующая $n=o$. И такъ задача невозможна когда результатъ искомаго количества беконеченъ, то есть когда $x=\infty$.

VI. Естьли $a=c$, $b=d$, тогда $x=\frac{o}{o}$, и данное уравненїе обратится въ $ax+b=ax+b$. Обѣ части равны; слѣдовательно x можно дать всякую величину. И такъ $\frac{o}{o}$ есть *знакъ неопредѣленности*.

ГЛАВА XII.

О содержаніяхъ и пропорціяхъ.

169. *Содержаніе* или *отношеніе* есть выраженіе сравненія одного количества съ другимъ.

170. Содержаніе бываетъ ариѳметическое, когда сравнивая количества, разсуждаемъ чемъ одно больше или меньше другаго; *геометрическое* когда разсматриваемъ во сколько разъ одно больше или меньше другаго.

171. Содержаніе ариѳметическое количествъ a и b изображается a•b; содержаніе же геометрическое количествъ d и e изображается d:e.

172. Количество, показывающее чемъ a> или <b называется *разностію содержанія:* она находится, вычтя одно количество изъ другаго. И такъ ариѳметическое содержаніе количествъ a и b можетъ изобразиться чрезъ разность a—b; и на оборотъ разность содержаніемъ ариѳметическимъ.

Количество, показывающее во сколько разъ d больше или меньше e называется *знаменателемъ содержанія:* онъ опредѣляется, раздѣливши одно количество на другое. И такъ геометрическое содержаніе d:e можетъ изобразиться дробью $\frac{e}{d}$; и на оборотъ дробь геометрическимъ содержаніемъ.

173. Количества a, b, d, e называются *членами содержанія:* a и d *первыми* или *предыдущими;* b и e *вторыми* или *послѣдующими* членами.

174. Содержаніе геометрическое, котораго оба члена равны называется *содержаніемъ равенства.* На примѣръ a:a есть содержаніе равенства: здѣсь знаменатель содержанія 1.

175. *Два содержанія равныя порознь третьему, равны между собою.* На примѣръ, естьли 10:5=4:2 и 12:6=4:2, то 10:5=12:6; также естьли 10•7=5•2 и 18•15=5•2, то 10•7=18•15.

176. *Содержаніе ариѳметическое неперемѣнится, когда къ обоимъ его членамъ будетъ придано, или отъ обоихъ отнято, по одному количеству.* Такимъ образомъ a. b=a+m.b+m =a—n. b—n; ибо во всѣхъ нихъ разность содержанія a—b.

177. *Содержаніе геометрическое неперемѣнится, когда оба его члена помножатся, или раздѣлятся, на одно количество.* Такимъ образомъ c:d=c×m:d×m= $\frac{c}{n}$: $\frac{d}{n}$; ибо во всѣхъ сихъ содержаніяхъ знаменатель содержанія равенъ $\frac{d}{c}$.

178. *Сложнымъ содержаніемъ* называется отношеніе произведенія предыдущихъ членовъ нѣсколькихъ содержаній къ произведенію послѣдующихъ членовъ тѣхъ же содержаній. На примѣръ естьли содержаній a: b, c: d, e: f предыдущіе члены перемножатся между собою, а послѣдующіе между собою, то содержаніе ace: bdf называется *сложнымъ содержаніемъ.*

Сложное содержаніе простыхъ содержаній a:b, b:c, c:d, d:e, будетъ a:e. Ибо взявши данныхъ содержанiй произведенiя предыдущихъ и послѣдующихъ членовъ будетъ сложное содержанiе $abcd:bcde$; но $abcd:bcde=\frac{abcd}{bcd}:\frac{bcde}{bcd}=a:e$. Слѣдовательно сложное содержанiе есть $a:e$.

179. Сложное содержанiе двухъ равныхъ простыхъ содержанiй называется *квадратнымъ* или *удвоеннымъ*. На примѣръ двухъ простыхъ и равныхъ содержанiй $a:b$, $a:b$, сложное будетъ $a^2:b^2$ и называется квадратнымъ.

180. Равномѣрно сложное содержанiе $a^3:b^3$, трехъ равныхъ простыхъ содержанiй $a:b$, $a:b$, $a:b$, называется *кубическимъ* или *утроеннымъ*.

181. Содержанiе $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=a:b$. Посему говорятъ, что дроби, имѣющiя равныхъ знаменателей, находятся въ *прямомъ содержанiи* числителей.

Содержанiе $\frac{a}{d}:\frac{a}{b}=b:d$. Ибо, приведя обѣ дроби $\frac{a}{d}$ и $\frac{a}{b}$ къ одинакому знаменателю, будетъ $\frac{a}{d}:\frac{a}{b}=\frac{ab}{bd}:\frac{ad}{bd}=ab:ad=b:d$. Посему говорятъ, что дроби, имѣющiя равныхъ числителей, находятся въ *обратномъ содержанiи* знаменателей.

Замѣтимъ, что $b:d=\frac{1}{d}:\frac{1}{b}$. Ибо $\frac{a}{d}:\frac{a}{b}=\frac{1}{d}:\frac{1}{b}$, и $\frac{a}{d}:\frac{a}{b}=b:d$. Слѣдовательно $b:d=\frac{1}{d}:\frac{1}{b}$.

Содержанiе двухъ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ есть $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$. Оно равно $ad:bc$. Ибо приведя обѣ дроби къ одинакому знаменателю, будетъ $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}:\frac{bc}{bd}=ad:bc$. По сей причинѣ говорятъ, что *дроби находятся въ сложномъ содержанiи, въ прямомъ числителей и обратномъ знаменателей.*

182. Два равныя содержанiя составляютъ *пропорцiю*.

183. Пропорцiя называется *ариѳметическою*, когда содержанiя, ея составляющiя, суть ариѳметическiя; на противъ она называется *геометрическою*, когда состоитъ изъ геометрическихъ содержанiй.

184. Ариѳметическая пропорцiя изображается такъ: $a \cdot b : c \cdot d$; геометрическая же такимъ образомъ: $m:n::o:p$. Содержанiя $a \cdot b$, $m:n$ называются *первыми*; $c \cdot d$ и $o:p$ *вторыми*. Количества a, b. c, d, m, n, o, p называются *членами* пропорцiи. a, d, m, p суть *крайнiе*; b, c, n, o *среднiе*. Также a, m называются *предыдущими* или *первыми членами перваго содержанiя*; c, o *предыдущими втораго содержанiя*; b, n *послѣдующими* или *вторыми членами перваго содержанiя*; d, p *послѣдующими втораго содержанiя*.

185. Пропорцiи бываютъ *раздѣльныя* и *непрерывныя*. Первыми называются тѣ, въ которыхъ среднiе члены неравны; таковы суть $a \cdot b : c \cdot d$, $m:n::o:p$, $2 \cdot 4 : 3 \cdot 5$, $4:8::5:10$. Вторыми тѣ, въ которыхъ среднiе члены равны; таковы суть: $a \cdot b : b \cdot d$, $m:n::n:p$, $2 \cdot 4 : 4 \cdot 6$, $3:6::6:12$. Онѣ изображаются $\div a \cdot b \cdot d$, $\div\!\div m:n:p$, $\div 2 \cdot 4 \cdot 6$, $\div\!\div 3:6:12$. Въ семъ случаѣ члены b, n, 4, 6 называются *средними пропорцiональными членами*.

186. *Пропорцiя ариѳметическая $a \cdot b : c \cdot d$ можетъ быть изображена $a-b=c-d$.* Ибо $a \cdot b = a-b$, $c \cdot d = c-d$.

187. *Пропорція геометрическая* $m : n :: o : p$ *можетъ представлена быть* $\frac{n}{m} = \frac{p}{o}$. Ибо $m : n = \frac{n}{m}$, $o : p = \frac{p}{o}$.

О свойствахъ ариѳметическихъ пропорцій.

188. *Во всякой ариѳметической пропорціи* $a \cdot b : c \cdot d$ *сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ*, то есть: $a + d = b + c$. Ибо $a \cdot b : c \cdot d$ тоже что $a - b = c - d$; но, переставя члены въ семъ уравненіи, будетъ $a + d = b + c$.

189. И такъ, когда въ пропорціи $a \cdot b : c \cdot d$ три члена извѣстны, четвертой можно сыскать; ибо изъ уравненія $a + d = b + c$, слѣдуетъ:

1^{e}. $a = b + c - d$,

2^{e}. $b = a + d - c$,

3^{e}. $c = a + d - b$,

4^{e}. $d = b + c - a$;

то есть *крайній членъ равенъ суммѣ среднихъ безъ даннаго крайняго; а средній равенъ суммѣ крайнихъ безъ извѣстнаго средняго.*

190. *Въ ариѳметической непрерывной пропорціи* $\div a \cdot b \cdot d$ *сумма крайнихъ членовъ равна двойному среднему*, *то есть* $a + d = 2b$. Ибо $\div a \cdot b \cdot d$ то же что $a \cdot b : b \cdot d$; но въ сей послѣдней пропорціи $a + d = b + b$; и такъ $a + d = 2b$.

191. И такъ, зная два члена въ непрерывной ариѳметической пропорціи $\div a \cdot b \cdot d$, можно опредѣлить третій; ибо изъ уравненія $a + d = 2b$, слѣдуетъ

1^{e}. $a = 2b - d$,

2^{e}. $d = 2b - a$,

3^{e}. $b = \frac{a + d}{2}$;

то есть *крайній членъ равенъ разности между удвоеннымъ среднимъ и даннымъ крайнимъ; средній же членъ равенъ полсуммѣ крайнихъ членовъ.*

192. *Естьли четыре количества a, b, c, d, суть такія, что сумма крайнихъ равна суммѣ среднихъ, то онѣ составляютъ ариѳметическую пропорцію* $a \cdot b : c \cdot d$.

Въ самомъ дѣлѣ уравненіе $a + d = b + c$ даетъ $a - b = c - d$, и слѣдовательно $a \cdot b : c \cdot d$.

193. Отсюда происходитъ, что *пропорція неперемѣнится, когда перемѣнятся мѣста крайнихъ и среднихъ членовъ, то есть когда поставятся крайніе на мѣста среднихъ, а средніе на мѣста крайнихъ; ибо очевидно, что сумма двухъ крайнихъ количествъ всегда равна будетъ суммѣ двухъ среднихъ.* Также *пропорція неперемѣнится, когда третій членъ поставленъ будетъ на мѣсто втораго, а второй на мѣсто третьяго;* ибо въ семъ случаѣ сумма среднихъ будетъ та же.

194. *Пропорція ариѳметическая неперемѣнится, когда будетъ приложено къ обоимъ*

предыдущимъ или послѣдующимъ членамъ, или отнято отъ обоихъ, то же количество.

Пусть будетъ пропорція $a \cdot b : c \cdot d$. Понеже она даетъ $a+d=b+c$, то очевидно $a \pm m+d=b+c \pm m$; слѣдовательно $a \pm m \cdot b : c \pm m \cdot d$. Также когда $a+d=b+c$, то $a+d \pm m=b \pm m+c$; и такъ $a \cdot b \pm m : c \cdot d \pm m$.

О свойствахъ геометрическихъ пропорцій.

195. *Во всякой геометрической пропорціи $a : b :: c : d$ произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ*, то есть $a \cdot d=b \cdot c$.

Ибо пропорція данная можетъ быть изображена $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; слѣдовательно $b \cdot c=a \cdot d$.

196. И такъ когда три члена геометрической пропорціи даны, четвертой можно сыскать; ибо уравненіе $a \cdot d=b \cdot c$, даетъ:

$$1^e.\ a=\frac{b \cdot c}{d},$$
$$2^e.\ b=\frac{a \cdot d}{c},$$
$$3^e.\ c=\frac{a \cdot d}{b},$$
$$4^e.\ d=\frac{b \cdot c}{a};$$

то есть: *искомый крайній членъ равенъ произведенію среднихъ, раздѣленному на извѣстный крайній*; напротивъ *средній равенъ произведенію крайнихъ раздѣленному на данный средній.*

197. *Въ геометрической непрерывной пропорціи $\div a : b : d$ произведеніе крайнихъ равно квадрату средняго члена*, то есть $a \cdot d=b^2$.

Ибо $\div a : b : d = a : b :: b : d$, но въ сей пропорціи $a \cdot d=b \cdot b$; слѣдовательно $a \cdot d=b^2$.

198. И такъ когда два члена непрерывной геометрической пропорціи даны, то третій найти можно; ибо уравненіе $a \cdot d=b^2$ даетъ:

$$1^e.\ a=\frac{b^2}{d},$$
$$2^e.\ d=\frac{b^2}{a},$$
$$3^e.\ b=\sqrt{ad};$$

то есть: *крайній членъ равенъ квадрату средняго раздѣленному на извѣстный крайній; средній же равенъ квадратному корню изъ произведенія крайнихъ.*

199. *Естьли четыре количества a, b, c, d суть такія, что произведеніе среднихъ равно произведенію крайнихъ, то они составляютъ геометрическую пропорцію.*

Въ самомъ дѣлѣ уравненіе $a \cdot d=b \cdot c$ даетъ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; слѣдовательно $a : b :: c : d$.

200. Отсюда слѣдуетъ, *что пропорція геометрическая неперемѣнится, когда крайніе члены будутъ поставлены на мѣста среднихъ, а средніе на мѣста крайнихъ*; ибо произведеніе крайнихъ въ семъ случаѣ будетъ равно произведенію среднихъ. *Пропорція также неперемѣнится, ежели третій членъ будетъ поставленъ*

на мѣстѣ втораго, а второй на мѣстѣ третьяго; ибо произведенїе среднихъ будетъ то же.

201. *Въ пропорцїи геометрической* $a : b :: c : d$ *члены перваго или втораго содержанїя, будучи помножены или раздѣлены на какое нибудь количество, содержатся такъ какъ члены втораго или перваго содержанїя*; то есть:

$1^e.$ $a \cdot m : b \cdot m :: c : d$; $2^e.$ $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} :: c : d$; $3^e.$ $a : b :: c \cdot m : d \cdot m$; $4^e.$ $a : b :: \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$.

Ибо въ первомъ случаѣ $a : b = a \cdot m : b \cdot m$; слѣдовательно $a \cdot m : b \cdot m :: c : d$.

Во второмъ $a : b = \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$; слѣдовательно $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} :: c : d$.

Въ третьемъ $c : d = c \cdot m : d \cdot m$; слѣдовательно $a : b :: c \cdot m : d \cdot m$

Въ четвертомъ $c : d = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$; слѣдовательно $a : b :: \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$.

202. *Въ пропорцїи геометрической* $a : b :: c : d$ *предыдущїе, или послѣдующїе члены, будучи умножены или раздѣлены на какое нибудь количество, содержатся какъ послѣдующїе или предыдущїе члены*; то есть: $1^e.$ $a \times m : c \times m :: b : d$; $2^e.$ $\frac{a}{n} : \frac{c}{n} :: b : d$; $3^e.$ $b \times m : d \times m :: a : c$; $4^e.$ $\frac{b}{n} : \frac{d}{n} :: a : c$.

Ибо такъ какъ данная пропорцїя можетъ быть перемѣнена въ $a : c :: b : d$, то будетъ въ первомъ случаѣ $a \times m : c \times m :: b : d$.

Во второмъ $\frac{a}{n} : \frac{c}{n} :: b : d$.

Въ третьемъ $a : c :: b \times m : d \times m$.

Въ четвертомъ $a : c :: \frac{b}{n} : \frac{d}{n}$.

203. *Въ пропорцїи геометрической* $a : b :: c : d$ *сумма или разность членовъ перваго содержанїя, содержится къ предыдущему или послѣдующему того же содержанїя, такъ какъ сумма или разность членовъ втораго содержанїя къ предыдущему или послѣдующему того же содержанїя*; то есть $1^e.$ $a \pm b : a :: c \pm d : c$; $2^e.$ $a \pm b : b :: c \pm d : d$.

Ибо въ первомъ случаѣ произведенїе крайнихъ будетъ $ac \pm bc$, а среднихъ $ac \pm ad$, но $ac \pm bc = ac \pm ad$, ибо $bc = ad$; слѣдовательно $a \pm b : a :: c \pm d : c$.

Во второмъ случаѣ произведенїе крайнихъ будетъ равно $ad \pm bd$, а среднихъ равно $bc \pm bd$, но $ad \pm bd = bc \pm bd$, ибо $ad = bc$; слѣдовательно $a \pm b : b :: c \pm d : d$.

204. *Въ пропорцїи геометрической* $a : b :: c : d$ *сумма или разность членовъ перваго содержанїя, содержится къ разности или суммѣ членовъ того же содержанїя, такъ какъ сумма или разность членовъ втораго содержанїя къ разности или суммѣ членовъ того же содержанїя*; то есть: $a \pm b : a \mp b :: c \pm d : c \mp d$.

Ибо $(a \pm b)(c \mp d) = (a \mp b)(c \pm d)$, то есть $ac \pm bc \mp ad - bd = ac \mp bc \pm ad - bd$, потому что $ad = bc$; слѣдовательно $a \pm b : a \mp b :: c \pm d : c \mp d$.

205. *Въ пропорцїи геометрической* $a : b :: c : d$ *сумма или разность предыдущихъ членовъ, содержится къ суммѣ или разности послѣ-*

дующихъ, такъ какъ члены котораго нибудь содержанія; то есть: 1^e. $a \pm c : b \pm d :: a : b$, 2^e. $a \pm c : b \pm d :: c : d$.

Ибо данная пропорція $a : b :: c : d$ можетъ быть перемѣнена въ $a : c :: b : d$, то въ первомъ случаѣ будетъ $a \pm c : a :: b \pm d : b$; слѣдовательно $a \pm c : b \pm d :: a : b$. Во второмъ же случаѣ будетъ $a \pm c : c :: b \pm d : d$, слѣдовательно $a \pm c : b \pm d :: c : d$.

206. *Въ пропорціи геометрической $a : b :: c : d$ сумма или разность предыдущихъ членовъ, содержится къ суммѣ или разности послѣдующихъ, такъ какъ разность или сумма предыдущихъ содержится къ разности или суммѣ послѣдующихъ;* то есть: $a \pm c : b \pm d :: a \mp c : b \mp d$.

Ибо данная пропорція $a : b :: c : d$ можетъ быть перемѣнена въ $a : c :: b : d$, но $a \pm c : a \mp c :: b \pm d : b \mp d$; слѣдовательно $a \pm c : b \pm d :: a \mp c : b \mp d$.

207. *Ежели будетъ рядъ равныхъ содержаній $a : b :: c : d :: e : f$,* и проч. *то сумма или разность всѣхъ предыдущихъ, содержится къ суммѣ или разности всѣхъ послѣдующихъ, такъ какъ члены котораго нибудь содержанія, или какъ сумма нѣкоторыхъ предыдущихъ къ суммѣ тогожъ числа соотвѣтствующихъ послѣдующихъ; то есть:*

1^e. $a \pm c \pm e : b \pm d \pm f :: a : b$; 2^e. $a \pm c \pm e : b \pm d \pm f :: a \pm c : b \pm d$.

Ибо въ первомъ случаѣ $(a \pm c \pm e)\, b = (b \pm d \pm f)\, a$, или $ab \pm bc \pm be = ab \pm ad \pm af$, поелику $bc = ad$,

$be = af$; во второмъ же случаѣ $(a \pm c \pm e)(b \pm d) = (b \pm d \pm f)(a \pm c)$, или $ab \pm bc \pm be \pm ad + cd + de = ab \pm ad \pm af \pm bc + cd + cf$, понеже $be = af$, $de = cf$. Слѣдовательно 1^e. $a \pm c \pm e : b \pm d \pm f :: a : b$; 2^e. $a \pm c \pm e : b \pm d \pm f :: a \pm c : b \pm d$.

208. *Въ пропорціи геометрической $a : b :: c : d$ степени и корни членовъ находятся въ пропорціи;* то есть: 1^e. $a^m : b^m :: c^m : d^m$; 2^e. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$. (*)

Ибо изъ данной пропорціи слѣдуетъ $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, но $\frac{b^m}{a^m} = \frac{d^m}{c^m}$; слѣдовательно $a^m : b^m :: c^m : d^m$. Равномѣрно $\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}}$; слѣдовательно $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$.

209. *Перемноживъ или раздѣливъ члены одной пропорціи на члены другой, произведенія или частныя будутъ также въ пропорціи;* на примѣръ: пусть будутъ двѣ пропорціи $a : b :: c : d$, $m : n :: o : p$, то 1^e. $am : bn :: co : dp$; 2^e. $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} :: \frac{c}{o} : \frac{d}{p}$.

Ибо первую пропорцію можно изобразить $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, вторую же $\frac{n}{m} = \frac{p}{o}$; но помножа одно уравненіе на другое, будетъ $\frac{bn}{am} = \frac{dp}{co}$; слѣдовательно $am : bn :: co : dp$.

(*) Вообще *степенью* какого нибудь количества называется произведеніе самаго на себя нѣсколько разъ; а количество, производящее оную степень, именуется *корнемъ* ея.

Изъ данныхъ пропорцій вывожу $a \cdot d = b \cdot c$, $m \cdot p = n \cdot o$, потомъ $\frac{a.d}{m.p} = \frac{b.c.}{n.o}$; и такъ $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} :: \frac{c}{o} : \frac{d}{p}$.

Равномѣрно естьли $a:b::c:d$
$e:f::g:h$
$k:l::m:n$;
то будетъ $aek:bfl::cgm:dhn$.

Доказательство подобно предыдущему.

210. *Когда въ двухъ пропорціяхъ первые и трети члены порознь равны, то вторые пропорціональны четвертымъ* ; то есть когда
$a:b::c:d$,
$a:f::c:g$;
то $b:f::d:g$.

Ибо изъ 1й пропорціи слѣдуетъ $a:c::b:d$,
а изъ 2й — — — — $a:c::f:g$.

Откуда $b:d::f:g$.

И такъ $b:f::d:g$.

211. *Когда въ двухъ пропорціяхъ средніе члены порознь равны, то первые находятся въ обратномъ содержаніи четвертыхъ* ; на примѣръ естьли $a:b::c:d$ и $f:b::c:g$, то $a:f::g:d$; ибо изъ первой пропорціи вывожу $ad=bc$, изъ второй $fg=bc$, слѣдовательно $ad=fg$. И такъ $a:f::g:d$.

ГЛАВА XIII.

О пропорціональныхъ правилахъ.

212. *Пропорціональныя правила* суть дѣйствія, помощію которыхъ рѣшатся разныя задачи, до общежитія касающіяся. Ариѳметики ихъ такъ назвали потому, что они ихъ основываютъ на геометрическихъ пропорціяхъ; они суть: *правила тройныя простое* и *сложное* ; *правило складное* или *товарищества* ; *правило смѣшенія* ; *и проч.*

О тройномъ правилѣ.

213. Правило тройное по великому употребленію своему называется *золотымъ*. Оно бываетъ или *прямое*, или *обратное*. Первое состоитъ въ опредѣленіи искомаго числа, сравнивая два частныя числа. Второе же состоитъ въ опредѣленіи искомаго числа, посредствомъ двухъ произведеній.

214. Вся трудность въ рѣшеніи задачь по симъ правиламъ состоитъ въ расположеніи четырехъ чиселъ въ видѣ двухъ частныхъ, или произведенія, или пропорцій. Слѣдующіе примѣры намъ пояснятъ сіе и мы увидимъ, что тройное правило можетъ быть замѣнено уравненіями первой степени.

Задачи на тройное прямое правило.

215. I. Когда за 12 аршинъ сукна заплачено 84 рубли; то сколько должно заплатить за 5 аршинъ?

Цѣна каждаго аршина можетъ быть изображена чрезъ $\frac{84р.}{12а}$ и $\frac{хр.}{5а}$, слѣдовательно $\frac{84р.}{12а} = \frac{хр.}{5а}$.

И такъ $12 : 84 :: 5 : x$;

$\frac{84 \times 5}{12} = x = 35$ рублямъ

то есть: за 5 аршинъ должно заплатить 35 рублей; величину сію получить можемъ тотчасъ изъ уравненія $\frac{84}{12} = \frac{x}{5}$.

216. II. Нѣкто, купя дворъ за 186 рублей 85 копѣекъ, потомъ отдалъ его въ наймы за $50\frac{1}{2}$ рублей въ годъ; спрашивается во сколько времени тотъ дворъ окупится?

Назвавши искомое время x, годовая плата изобразится чрезъ $\frac{5050 к.}{1}$ и $\frac{18685 к.}{x}$;

и такъ $\frac{5050}{1} = \frac{18685}{x}$,

$1 : 5050 :: x : 18685$;

слѣдовательно $x = \frac{18685}{5050} = 3$ годамъ 8 мѣсяцамъ 12 днямъ.

217. III. Нѣкто заплатилъ долгу $\frac{2}{3}$, а на немъ осталось 6248 рублей; спрашивается сколько на немъ было долгу и сколько онъ заплатилъ?

Назовемъ весь долгъ x, то будетъ $\frac{1}{3}x = 6248$, слѣдовательно $\frac{1}{3} : 1 :: 6248 : x$ и такъ $x = 6248 \times 3 = 18744$, то есть всего на немъ долгу было 18744 рубли; когда вычтимъ изъ сего 6248 рублей, то остатокъ 12496 рублей; будетъ отданныя деньги.

218. IV. *Нѣкто купилъ 525 фунтовъ сахару по 142 рубли сто: спрашивается сколько должно заплатить за весь товаръ?*

Назвавши плату за весь товаръ x, говорю $\frac{142}{100} = \frac{x}{525}$, откуда происходитъ пропорція $100 : 142 :: 525 : x$; и такъ $x = \frac{525 \times 142 р.}{100} = 745\frac{1}{2}$.

Такое рѣшеніе подобныхъ вопросовъ, въ коихъ опредѣляется цѣна данныхъ вещей посредствомъ ста, называется *сотеннымъ правиломъ:* оно какъ видно состоитъ въ помноженіи даннаго числа вещей на сто, частное будетъ цѣна всего товара.

219. V. Два купца мѣнялись товаромъ, одинъ имѣлъ 25 пудовъ 30 фунтовъ сахару, цѣною по 150 копѣекъ фунтъ; а у другова сукно по 20 рублей аршинъ; спрашивается сколько надобно дать сукна за сахаръ?

Называю x цѣну всего сахара, то будетъ $\frac{150 к.}{1 ф.} = \frac{x}{25 п. 30 ф.}$ или $\frac{150 к.}{1 ф.} = \frac{x}{1030 ф.}$, откуда $1 : 150 :: 1030 : x$; слѣдовательно $x = \frac{1030 \times 150}{1} = 1545$ рублямъ.

Теперь назвавши y число аршинъ сукна, сколько должно дать за сахаръ, говорю $\frac{20 р.}{1 а.} = \frac{1545 р.}{y ар.}$, откуда $20 : 1 :: 1545 : y$; слѣдовательно $y = \frac{1545}{20} = 77\frac{1}{4}$ арш.

220. VI. Купецъ, которому надлежало черезъ девять мѣсяцовъ получить 1680 руб., желаетъ взять теперь; а за то, что онъ беретъ до сроку, уступаетъ пропорціонально 8 руб. на

100 руб. въ годъ. Спрашивается сколько ему вмѣсто 1680 рублей доведется взять?

Назвавши x процентъ девятимѣсячный, будетъ $\frac{8\text{ р.}}{12\text{ м.}} = \frac{x}{9}$, $12 : 8 :: 9 : x$; слѣдовательно $x = \frac{8 \times 9}{12} = 6$ рублямъ.

Назвавши теперь искомое число денегъ y, будетъ 106 руб. : 100 :: 1680 руб. : $y = \frac{1680 \times 100}{106} =$ 1584 руб. $90\frac{1}{2}$ коп.

221. VII. Сколько надлежитъ напередъ взять оброчныхъ денегъ за пять лѣтъ по 100 руб. на годъ, ежели уступить за то пропорціонально проценту 6 руб. на 100 въ годъ?

Говорю I. $106 : 100 :: 100 : x = 94$ р. 34 к. за 1й. годъ.
II. $112 : 100 :: 100 : y = 89$ р. $28\frac{1}{2}$ к. - 2й. —
III. $118 : 100 :: 100 : z = 84$ р. $74\frac{1}{2}$ к. - 3й. —
IV. $124 : 100 :: 100 : x' = 80$ р. $64\frac{1}{2}$ к. - 4й. —
V. $130 : 100 :: 100 : y' = 76$ р. $92\frac{1}{2}$ к. - 5й. —
425 руб. 94 коп.
за 5 лѣтъ вмѣсто 500 рублей.

Задачи на тройное обратное правило.

222. Въ осажденной крѣпости находится провіанту на 30 дней, по 55 пудовъ на день, осаду же желаютъ продолжить 36 дней; спрашивается сколь великъ долженъ быть вмѣсто прежняго дневной провіантъ?

Называю его x и говорю $\overset{д}{30}.\overset{п}{55} = \overset{д}{36}.\overset{п}{x}$; ибо провіантъ 30 дневной равенъ по силѣ вопроса 36

дневному. И такъ $30 : 36 :: x : 55$; слѣдовательно $x = \frac{55 \times 30}{36} = 45$ пудамъ 33 фунтамъ 32 золот.

223. II. Въ одно мѣсто потребно 40ка ведерныхъ 640 бочекъ; спрашивается сколько нужно, чтобъ замѣнить 40 ведерные, 10ти ведерныхъ боченковъ?

Назвавши число ихъ x, говорю $640.\ 40 = x.10$, слѣдовательно $640 : x :: 10 : 40$. И такъ $x = \frac{640 \times 40}{10} =$ 2560 десятиведернымъ боченкамъ.

224. III. На обивку покоевъ пошло матеріи $460\frac{1}{2}$ аршинъ въ $2\frac{1}{4}$ аршина шириною; спрашивается сколько пойдетъ на обивку тѣхъ же покоевъ другой матеріи шириною въ $\frac{1}{2}$ аршина?

Называю x искомое число аршинъ и говорю $460\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4} = x\frac{1}{2}$, откудо $460\frac{1}{2} : x :: \frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$; слѣдовательно $x = \frac{460\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 2072\frac{1}{4}$ аршинамъ.

225. IV. Естьли 15 человѣкъ работниковъ сдѣлаютъ нѣкоторую работу въ 8 дней; то во сколько времени могутъ сдѣлать ее 3 человѣка?

Называю x искомое число дней и говорю $15.8 = 3.x$, откуда вывожу $15 : 3 :: x : 8$; слѣдовательно $x = \frac{15 \times 8}{3} = 40$ днямъ.

226. V. Курьеръ проѣхалъ нѣкоторый путь въ 36 дней, въ то время когда день былъ 15 часовъ; спрашивается во сколько дней онъ проѣдитъ тотъже путь, когда день будетъ въ 16 часовъ?

Назвавши x искомое число дней, говорю $\overset{д}{36}.\overset{ч}{15} = x.16$, откуда получаю $36 : x :: 16 : 15$, слѣдовательно $x = \frac{36 \times 15}{16} = \overset{д}{33},\ \overset{ч}{18}$.

227. VI. 1200 человѣкамъ дано запасу на 4 мѣсяца; но, чтобъ достало того запасу на 10 мѣсяцевъ, спрашивается сколько надобно оставить человѣкъ?

Называю x число, какое нужно оставить, людей и говорю $\overset{ч}{1200}\times\overset{м.}{4}=x.\overset{м.}{10}$, слѣдовательно $1200:x::10:4$; и такъ $x=\frac{1200\times4}{10}=480$ человѣкамъ.

Изъ рѣшенія всѣхъ сихъ задачь видно, что въ *тройномъ простомъ правилѣ*, какъ ниже увидимъ и во всѣхъ прочихъ, *вмѣсто пропорцій можно употреблять уравненія.*

О сложномъ тройномъ правилѣ.

228. *Сложное тройное правило* есть способъ къ пяти, семи и девяти даннымъ числамъ находить шестое, осьмое и десятое. По сему оно бываетъ или *пятерное*, или *семерное*, или *девятерное*. Въ ономъ правилѣ изъ всѣхъ данныхъ членовъ или чиселъ три почитаются обыкновенно главными, изъ коихъ два должны быть одного рода между собою, а третій одного также рода съ искомымъ; прочіе же члены или числа, сколько ихъ не будетъ сверхъ трехъ, почитаются за обстоятельства: чрезъ сіе вопросы сложнаго тройнаго правила превращаются въ вопросы простаго тройнаго правила; слѣдующая задача намъ пояснитъ сіе и покажетъ способъ рѣшать ей подобныя.

229. 300 работниковъ, работая 8 часовъ въ день, выкопали въ 50 дней ровъ длиною въ 200 сажень, шириною въ 10 и глубиною въ 4. Спрашивается сколько надобно работниковъ, чтобъ они, работая 10 часовъ въ день, выкопали ровъ длиною въ 850, шириною въ 8, а глубиною въ 2 сажени?

Пусть будетъ x искомое число работниковъ. Говорю 300 человѣкъ, работающихъ по 8 часовъ въ 50 дней, значитъ то же, что $300\times8\times50=120000$ человѣкамъ работающимъ 1 часъ. Точно также x человѣкъ работающихъ по 10 часовъ въ 50 дней, значитъ то же, что $x\times10\times50=500x$ человѣкамъ дѣлающимъ 1 часъ. Также говорю, работа первыхъ работниковъ $=200\times10\times4=8000$ кубическимъ саженямъ; вторыхъ же $=850\times8\times2=13600$ куб. саженямъ. И такъ данный вопросъ можетъ быть превращенъ въ сей: 120000 работниковъ выкопали 8000 куб. саженей, а $500x$ работниковъ выкопали 13600 кубич. саженей. Работа каждаго работника въ первомъ случаѣ $=\frac{8000 \text{ к.с.}}{120000 \text{ ч.}}$, а во второмъ $\frac{13600}{500x}$. И такъ $\frac{8000}{120000}=\frac{13600}{500x}$, откуда получимъ пропорцію $120000:8000::500x:13600$, которая бъ могла прямо быть написана потому, что труды пропорціональны работникамъ.

И такъ $500x=\frac{120000\times13600}{8000}=204000$,

$x=\frac{204000}{500}=408$ человѣкамъ; то есть чтобъ выкопать ровъ въ 850 сажень длиною, 8 шириною и 2 глубиною въ 50 дней, работая по 10 часовъ въ день, потребно 408 человѣкъ.

Здѣсь x могло быть прямо выведено, безъ употребленія пропорціи, изъ уравненія $\frac{8000}{120000} = \frac{13600}{500x}$.

О складномъ правилѣ.

230. *Правило складное или товарищества* есть способъ раздѣлять данное количество на части пропорціонально даннымъ же количествамъ. Оно *правиломъ товарищества* названо потому, что посредствомъ его по большей части разчитываются купеческіе барыши, или наклады. И такъ правило сіе состоитъ въ рѣшеніи слѣдующей всеобщей задачи:

231. *Раздѣлить количество* a *на три части* x, y, z *пропорціонально количествамъ* m, n, p.

Будетъ 1е. $x : y :: m : n$; или $\frac{y}{x} = \frac{n}{m}$, слѣд. $y = \frac{nx}{m}$.

2е. $x : z :: m : p$; или $\frac{z}{x} = \frac{p}{m}$, слѣд. $z = \frac{px}{m}$.

Но по силѣ вопроса $x + y + z = a$; и такъ вставя вмѣсто y и z величины ихъ, изображенныя въ x, получимъ $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a$, или $\frac{(m+n+p)}{m} x = a$.

И такъ $x = \frac{am}{m+n+p}$.

Потомъ получимъ:

$y = \frac{a.\,n}{m+n+p}$, $z = \frac{a.\,p}{m+n+p}$.

Сіи три уравненія даютъ три пропорціи:

$m+n+p : a :: m : x$; $m+n+p : a :: n : y$; $m+n+p : a :: p : z$.

то есть: *сумма пропорціональныхъ данныхъ количествъ, содержится къ дѣлимому количеству, какъ одно изъ данныхъ пропорціональныхъ количествъ, содержится къ соотвѣтствующей ему пропорціональной части:* такое предлагаютъ правило въ ариѳметикѣ.

Слѣдуя сему правилу ясно видно, что надобно составить столько пропорцій, и слѣдовательно столько умноженій и дѣленій, сколько надобно сыскать пропорціональныхъ частей. Однако всѣ сіи дѣленія можно привести въ одно.

Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что $\frac{a}{m+n+p} = g$, то будетъ $x = g.\,m$; $y = g.\,n$; $z = g.\,p$.

И такъ единожды раздѣливши a на $m+n+p$, тогда останутся одни только умноженія; то есть: надлежитъ помножить частное поперемѣнно на m, n, p.

Естьлибы надлежало раздѣлить какое нибудь количество на большее число частей пропорціональныхъ даннымъ количествамъ, то должно въ семъ случаѣ поступить подобнымъ образомъ; то есть: *вообще всякая часть равна дѣлимому количеству, раздѣленному на сумму пропорціональныхъ частей, и помноженному на соотвѣтственную пропорціональную часть.*

232. Принаровимъ сію задачу къ частнымъ случаямъ:

I. Раздѣлить 26152 рубля на 10 ротъ, пропорціонально числу людей въ каждой ротѣ находящихся. Первая рота состоитъ изо 100 человѣкъ, вторая изъ 96, третья изъ 104, четвершая изъ 105, пятая изъ 95, шестая изъ 92, седьмая изъ 90, осьмая изъ 88, девятая изъ 84; десятая изъ 80?

Дѣлю 26152 рубли на 904, число людей находящихся во всѣхъ ротахъ, частное нахожу 28; потомъ множу его попеременно на число людей находящихся въ каждой ротѣ; нахожу что первая получитъ 28×100=2800 рублей, вторая 28×96=2685 рублей, третья 28×104=2912 рублей, четвертая 28×105=2940 рублей, пятая 95×28=2660 рублей, шестая 28×92=2576 рублей седьмая 28×90=2510 рублей, осьмая 28×88=2464 рубля, девятая 28×84=2352 рубля, десятая 28×80=2240 рублей.

233. II. Три купца, положа въ торгъ 724 рубли, изъ коихъ первой положилъ 412 рублей, второй 208 рублей, а третій 104 рубля, выторговали 1448 рублей; спрашивается по скольку достанется каждому?

Дѣлю 1448 на 724, частное 2 множу на 412 и получаю въ произведенiи 824 рубля, сумму перваго; потомъ множу 2 на 208 и получаю 416 рублей, сумму втораго; наконецъ множу 2 на 104 и нахожу 208 рублей, сумму третьяго.

234. III. Раздѣлить 12500 рублей между двумя человѣками пропорцiонально ихъ времени службы и жалованью; первой получалъ 2000 рублей жалованья и служилъ 15 лѣтъ, а второй 1200 жалованья и служилъ 20 лѣтъ.

Для сего говорю 15ти лѣтнее жалованье перваго по 2000 рублей равно годовому 2000×15=30000 рублямъ, 20ти лѣтнее же жалованье втораго по 1200 рублей равно годовому 1200×20=24000 рублямъ. И такъ данный вопросъ можетъ быть превращенъ въ сей: раздѣлить 12500 рублей на двоихъ пропорцiонально ихъ годовому жалованью, изъ коихъ первой получалъ 30000, а второй 24000 рублей. И такъ, по общей задачѣ складнаго правила, дѣлю 12500 на 30000+24000=54000, частное нахожу $\frac{12500}{54000}=\frac{25}{108}$; помножа сперва дробь сiю на 30000 нахожу, что первому надлежитъ дать 6944 рубля $44\frac{4}{9}$ коп.; потомъ помножа оную дробь на 24000 получаю, что второму должно выдать 5555 рублей $55\frac{5}{9}$ копѣекъ.

235. IV. Три купца положили въ торговлю 600 рублей; первой 100 рублей на 2 мѣсяца; второй 200 рублей на 4 мѣсяца; третій 300 рублей на 6 мѣсяцовъ. Послѣ сего времени капиталъ ихъ обратился въ 8400 рублей; спрашивается по скольку каждому достанется?

Говорю 100 рублей въ продолженiи 2хъ мѣсяцевъ то же принесутъ барыша, сколько 2 раза взятые 100 рублей, то есть 200 рублей, въ мѣсяцъ; 200 рублей въ 4 мѣсяца то же принесутъ, что 200×4=800 рублей въ одинъ мѣсяцъ; 300 рублей въ 6 мѣсяцевъ одинаковъ принесутъ барышъ, какой 300×6=1800 рублей въ мѣсяцъ.

Сложа вмѣстѣ 200, 800 и 1800 рублей получимъ 2800 рублей.

И такъ будетъ часть перваго $=\frac{8400}{2800}\times 200=600$ рублямъ.

Часть втораго $=\frac{8400}{2800}\times 800=2400$ рублямъ.

Часть третьяго $=\frac{8400}{2800}\times 1800=5400$ рублямъ.

О правилѣ смѣшенія.

236. *Правило смѣшенія* есть способъ изъ разныхъ сортовъ составлять одинъ сортъ, или приводить оные изъ разныхъ цѣнъ въ одну. Всѣ задачи къ правилу смѣшенія принадлежащія легко помощію уравненій рѣшены быть могутъ.

237. *Даны цѣны двухъ веществъ, требуется опредѣлить цѣну смѣси сихъ веществъ* (*).

Пусть означаютъ x и y числа единичныхъ мѣръ двухъ веществъ, p и q цѣны оныхъ единичныхъ мѣръ; то

$x+y$ будетъ означать смѣсь двухъ веществъ, а $px+qy$ цѣну смѣси;

слѣдовательно цѣна каждой единичной мѣры смѣси z будетъ

$$z=\frac{px+qy}{x+y}.$$

(*) Здѣсь подъ цѣною разумѣется цѣна единичной мѣры.

На примѣръ:

I^e^. Смѣшано вино двухъ сортовъ, перваго взято 8 бутылокъ, а втораго 12; цѣнажъ перваго 150 копѣекъ бутылка, а втораго 100 копѣекъ; спрашивается что стоить будетъ бутылка смѣси?

Здѣсь будетъ $8=x$, $12=y$, $150=p$, $100=q$, искомая цѣна $=z$;

Слѣдовательно $z=\frac{150 \times 8+100 \times 12}{8+12}=\frac{2400}{20}=120$, то есть бутылка смѣси стоитъ 120 копѣекъ.

II^e^. Когда три золотника серебра, изъ которыхъ каждый стоитъ 30 копѣекъ, смѣшаются съ 4 золотниками другаго серебра, изъ коихъ всякой стоитъ 53 копѣйки; то спрашивается что стоить будетъ каждый золотникъ смѣшаннаго серебра?

Здѣсь $3=x$, $4=y$, $30=p$, $53=q$;

Слѣдовательно $z=\frac{3\cdot 30+4\cdot 53}{3+4}=\frac{302}{7}=43\frac{1}{7}$,

то есть золотникъ смѣшаннаго серебра стоитъ $43\frac{1}{7}$ копѣйки.

III^e^. Нѣкто желаетъ смѣшать 6 фунтовъ олова, коего фунтъ стоитъ 60 копѣекъ, съ 16 фунтами свинцу, коего фунтъ стоитъ 20 копѣекъ Спрашивается что будетъ стоить фунтъ олова смѣшаннаго съ свинцомъ?

Здѣсь $6=x$, $16=y$, $60=p$, $20=q$;

Слѣдовательно $z = \frac{6 \cdot 60 + 16 \cdot 20}{6 + 16} = \frac{680}{22} = 30\frac{10}{11}$,

то есть фунтъ свинца смѣшаннаго съ оловомъ стоитъ $30\frac{10}{11}$ копѣекъ.

238. *Даны цѣны трехъ веществъ, требуется опредѣлить цѣну смѣси ихъ.*

Пусть означаютъ x, y, z числа единичныхъ мѣръ данныхъ веществъ, p, q, r цѣны оныхъ единичныхъ мѣръ; то будетъ

$x + y + z$ смѣсь данныхъ веществъ,

$px + qy + rz$ цѣна смѣси.

Слѣдовательно цѣна единичной мѣры Z смѣси будетъ

$$Z = \frac{px + qy + rz}{x + y + z}.$$

На примѣръ:

Нѣкто имѣетъ три сорта шелку: Iго фунтъ стоитъ 6 рублей, IIго 12 рублей, IIIго 16 руб. къ смѣшенію взялъ онъ Iго 3 фунта, IIго 4 фун. IIIго 5 фунтовъ; спрашивается что будетъ стоить фунтъ смѣшаннаго шелку?

Здѣсь $3 = x$, $4 = y$, $5 = z$, $6 = p$, $12 = q$, $16 = r$;

Слѣдовательно $Z = \frac{3.6 + 4.12 + 5.16}{3 + 4 + 5} = 12\frac{1}{6}$,

то есть фунтъ смѣшаннаго шелку стоитъ $12\frac{1}{6}$ рублей.

Вообще: *для опредѣленія цѣны единичной мѣры нѣсколькихъ смѣшанныхъ веществъ должно помножить число единичныхъ мѣръ каждаго вещества на ихъ цѣну; потомъ, сложивши произведенія вмѣстѣ, сумму раздѣлить на число веществъ.*

237. *Дано смѣшать два вещества, изъ коихъ единичная мѣра перваго стоитъ p, а втораго q. Спрашивается, сколько должно взять каждаго, чтобъ смѣшаннаго вещества было m единичныхъ мѣръ, и каждаябъ единичная мѣра смѣси стоила z?*

Пусть перваго вещества должно взять x, а втораго y, то будетъ

$px + qy$ цѣна всей смѣси; слѣдовательно цѣна единичной мѣры $\frac{px + qy}{x + y}$.

И такъ $\frac{px + qy}{x + y} = z \quad . \quad . \quad (1)$

$x + y = m \quad . \quad . \quad (2)$

Изъ (1) уравненія вывожу $px + qy = zx + zy$

$$px - zx = zy - qy$$

$$x = \left(\frac{z - q}{p - z}\right) y$$

Изъ (2) уравненія вывожу $x = m - y$

И такъ $m - y = \frac{zy - qy}{p - z}$

$$pm - py - mz + zy = zy - qy$$

$$py - qy = pm - mz$$

$$y = (p - z). \frac{m}{p - q}.$$

Слѣдовательно $x = m - (p-z)\frac{m}{p-q}$

$$x = m - \frac{pm - mz}{p-q}$$

$$x = \frac{pm - qm - pm + mz}{p-q}$$

$$x = (z-q)\frac{m}{p-q}.$$

На примѣръ:

I. Нѣкто желаетъ смѣшать два сорта серебра, изъ которыхъ перваго фунтъ стоитъ 12 рублей, а втораго 16 рублей. Спрашивается сколько должно взять каждаго сорта, чтобъ смѣшаннаго серебра было 6 фунтовъ, и изъ коихъ каждой стоилъ 14 рублей?

Здѣсь $12 = p$, $16 = q$, $6 = m$, $14 = z$.

x означаетъ сколько должно взять 1го сорта серебра

y означаетъ сколько должно взять 2го сорта серебра.

Слѣдовательно $x = (14-16)\frac{6}{12-16} = -2 \times \frac{6}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3.$

$y = (12-14).\frac{6}{12-16} = -2 \times \frac{6}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3.$

И такъ каждаго сорта должно взять по три фунта.

Въ самомъ дѣлѣ $\frac{3 \cdot 12 + 3 \cdot 16}{6} = 14$, то есть фунтъ смѣси будетъ стоить 14 рублей.

II. Нужно смѣшать два сорта вина: перваго ведро стоитъ 8 рублей, а втораго 19 рублей.

Спрашивается сколько должно взять каждаго сорта, чтобъ получить 5 ведръ вина, по 10 рублей каждое?

Здѣсь $8 = p$, $19 = q$, $5 = m$, $10 = z$.

Положимъ, x означаетъ сколько должно взять перваго сорта вина, y сколько втораго сорта; то будетъ

$$x = (10-19).\frac{5}{8-19} = 4\tfrac{1}{11}$$

$$y = (8-10).\frac{5}{8-19} = \frac{10}{11}$$

И такъ Iго сорта должно взять $4\frac{1}{11}$ ведра, а IIго $\frac{10}{11}$ ведра.

240. Въ заключенiе главы сей мы рѣшимъ слѣдующiй вопросъ, по употребленiю своему достойный замѣчанiя:

Пушка 24 фунтовая, состоящая изъ мѣди и олова, вѣситъ 5531 фунтъ, и заключаетъ въ себѣ 8,95 кубическихъ футовъ состава; требуется опредѣлить въ ней количество мѣди и олова, знавши что кубической футъ мѣди вѣситъ 630 фунтовъ, а олова 512?

Положимъ, что пушка содержитъ x кубическихъ фунтовъ мѣди, а y олова; то будетъ

$$x + y = 8.95 \qquad 630x + 512y = 5531$$

$$x = 8.95 - y \qquad x = \frac{5531 - 512y}{630}.$$

$$8.95 - y = \frac{5531 - 512y}{630}$$

Откуда $y = \frac{107.5}{118} = 0.911.$

$$x = 8.95 - y = 8.95 - 0.911 = 8.039.$$

Дабы имѣть общія формулы для всѣхъ одного рода съ симъ вопросомъ, положимъ что данной составъ будетъ вѣсить b фунтовъ, число кубическихъ въ немъ фунтовъ a, вѣсъ кубическаго фута одного вещества c фунтовъ, вѣсъ кубическаго фута другаго вещества d фунтовъ; назвавши, какъ и прежде x число кубическихъ футовъ одного вещества, а y другаго, получимъ два уравненія

$$x+y=a \quad , \quad cx+dy=b.$$

$$x=a-y \quad , \quad x=\frac{b-dy}{c}.$$

$$a-y=\frac{b-dy}{c}.$$

$$ac-cy=b-dy.$$

$$y=\frac{ac-b}{c-d}.$$

Слѣдовательно $x=a-y=a-\frac{ac-b}{c-d}=\frac{b-ad}{c-d}$.

241. Подъ сей вопросъ можно подвесть множество другихъ, для рѣшенія которыхъ стоитъ только вставить числовыя величины буквальныхъ количествъ въ выраженія $x=\frac{b-ad}{c-d}$, $y=\frac{ac-b}{c-d}$.

На примѣръ: *перелить 522 фунта на 42 куска, изъ коихъ бы одни вѣсомъ были 24 фунтовые, а другіе 6 фунтовые?* Легко примѣтить, что вопросъ сей тотъ же какъ бы требовалось: *опредѣлить количество кусковъ, изъ коихъ одни вѣсомъ въ 24 фунта, а другіе въ 6 фунтовъ, и каждой по 1 футу, находящихся въ составѣ, которой вѣситъ 522 фунта и содержитъ 42 кубическихъ фута?*

И такъ здѣсь будетъ $522=b$, $42=a$, $24=c$, $6=d$, x число 24 фунтовыхъ кусковъ, а y число 6 фунтовыхъ кусковъ.

Слѣдовательно $x=\frac{b-ad}{c-d}=\frac{522-42\cdot6}{24-6}=15$.

$$y=\frac{ac-b}{c-d}=\frac{42\cdot24-522}{24-6}=27.$$

то есть: 24 фунтовыхъ должно вылить 15, а 6 фунтовыхъ 27.

КОНЕЦЪ ПЕРВОЙ ЧАСТИ.

АЛГЕБРА.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

АЛГЕБРА.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ГЛАВА XIV.

О составленіи степеней и извлеченіи корней изъ одночленныхъ количествъ.

242. *Степенями* количества называются различныя произведенія, получаемыя чрезъ умноженіе количества сего на себя нѣсколько разъ. Количество же производящее степени называется *корнемъ* ихъ. Число, означающее сколько разъ количество множится само на себя называется *показателемъ степени*.

243. *Четными степенями* называются тѣ, которыхъ показатели суть числа четныя; *нечетными же степенями* тѣ, коихъ показатели суть числа нечетныя.

244. Всякое количество само по себѣ есть первая степень; на примѣръ:

а есть первая степень.

$a.a=a^2$. . . . . II степень

$a.a.a=a^3$. . . . . III —

$a.a.a.a=a^4$. . . . . IV —

$a.a.a.a.a=a^5$. . . . . V —

$a.a.a.a.a.a=a^6$. . . . . . . VI —

$-a$ . . . . I —

$-a.-a=a^2$. . . . . II —

$-a.-a.-a.=-a^3$. . . . . III —

$-a.-a.-a.-a=a^4$. . . . . IV —

$-a.-a.-a.-a.-a=-a^5$. . . V —

$-a.-a.-a.-a.-a.-a.=a^6$. VI —

и такъ далѣе.

Сїе намъ показываетъ 1е. *Что всѣ степени положительныхъ количествъ суть положительныя.* 2е. *Изъ отрицательныхъ количествъ всѣ четныя степени суть положительныя, а нечетныя суть отрицательныя.*

И такъ, назвавши m всякое четное число, будетъ

$$(a)^m = a^m$$

$$(a)^{m+1} = a^{m+1}$$

$$(-a)^m = a^m$$

$$(-a)^{m+1} = -a^{m+1}$$

245. Изъ понятїя о степеняхъ слѣдуетъ, что

$$(4a)^2=4a\times 4a=16a^2;$$

$$(3a^3b^2)^3=3a^3b^2\times 3a^3b^2\times 3a^3b^2=27a^9b^6;$$

$$\left(\frac{2ab^2}{5c^2d^3}\right)^2 = \frac{2ab^2}{5c^2d^3}\times\frac{2ab^2}{5c^2d^3}=\frac{4a^2b^4}{25c^4d^6};$$

$$(-2a^3)^5=-2a^3\times -2a^3\times -2a^3\times -2a^3\times -2a^3=-32a^{15}.$$

Сїе намъ даетъ правило:

Чтобъ возвесть количество въ какую нибудь степень, должно: 1е. ставить во всѣхъ случаяхъ знакъ +; кромѣ, когда показатель степени число нечетное и возводимое количество отрицательное, тогда ставится знакъ —; 2е. возвесть коеффицїентъ въ требуемую степень, чрезъ помноженїе самаго на себя; 3е написать буквы возводимаго количества; и 4е. показателя каждой буквы помножить на показателя степени.

И такъ

$$(2a^m)^6 = 2.2.2.2.2.2a^{6m} = 64a^{6m};$$

$$(a^m b^n)^p = a^{mp} b^{np};$$

$$\left(\frac{a^m c}{b^7}\right)^n = \frac{a^{mn} c^n}{b^{7n}}.$$

246. Познакомившись со степенями легко получить понятїе о корняхъ. Способъ, показывающїй опредѣлять корни какой нибудь степени называется *извлеченїемъ корней.*

247. *Показателемъ корня* называется число, означающее сколько разъ корень долженъ быть факторомъ, чтобъ произвелъ данную степень. На примѣръ въ выраженїи $\sqrt[3]{64}$, число 3 есть показатель, ибо оно означаетъ, что искомой корень долженъ быть помноженъ самъ на себя два раза: корень сей есть 4. Корни которыхъ всегда можно совершенную величину получить называются *рацїональными*; а тѣ, которыхъ

величину можно получить приближенно называются *несоизмѣримыми*, *ирраціональными*; на примѣръ $\sqrt{9}$ есть раціональной корень, а $\sqrt{2}$ ирраціональной.

248. Изъ понятія о степеняхъ слѣдуетъ: *чтобъ извлечь какой нибудь корень изъ количества, должно* 1е. *ставить въ корнѣ вмѣстѣ оба знака + и — когда показатель корня число четное; въ противномъ же случаѣ знакъ степени;* 2е. *изъ коеффиціента извлечь корень*, или *показателя его* (которой по большой части бываетъ 1) *раздѣлить на показателя корня;* 3е. *написать буквы степени;* и 4е. *раздѣлить показателя каждой буквы*, то есть каждаго фактора, *на показателя корня.* Такимъ образомъ:

$$\sqrt[10]{4a^2b} = \pm 4^{\frac{1}{10}} a^{\frac{2}{10}} b^{\frac{1}{10}}; \text{ ибо } \left(\pm 4^{\frac{1}{10}} a^{\frac{2}{10}} b^{\frac{1}{10}}\right)^{10} = 4a^2b.$$

$$\sqrt[15]{-25a^{10}bc^m} = -25^{\frac{1}{15}} a^{\frac{10}{15}} b^{\frac{1}{15}} c^{\frac{m}{15}} = -25^{\frac{1}{15}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{15}} c^{\frac{m}{15}};$$

ибо $\left(-25^{\frac{1}{15}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{15}} c^{\frac{m}{15}}\right)^{15} = -25a^{10}bc^m$.

$$\sqrt[m]{10a^m b^n c^p} = \pm 10^{\frac{1}{m}} a^{\frac{m}{m}} b^{\frac{n}{m}} c^{\frac{p}{m}} = \pm 10^{\frac{1}{m}} a b^{\frac{n}{m}} c^{\frac{p}{m}},$$

здѣсь m четное число; ибо

$$\left(\pm 10^{\frac{1}{m}} a b^{\frac{n}{m}} c^{\frac{p}{m}}\right)^m = 10a^m b^n c^p.$$

$$\sqrt[m+1]{-5a^7 b} = -5^{\frac{1}{m+1}} a^{\frac{7}{m+1}} b^{\frac{1}{m+1}},$$

здѣсь m четное число; ибо

$$\left(-5^{\frac{1}{m+1}} a^{\frac{7}{m+1}} b^{\frac{1}{m+1}}\right)^{m+1} = -5a^7 b.$$

$$\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{a^m}}{\sqrt[m]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{m}}}{b^{\frac{m}{m}}} = \frac{a}{b}; \text{ ибо } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m};$$

$$\sqrt[5]{\frac{4a^2}{3b^{10}}} = \frac{4^{\frac{1}{5}} a^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}} b^{\frac{10}{5}}} = \frac{4^{\frac{1}{5}} a^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}} b^{2}}, \text{ ибо } \left(\frac{4^{\frac{1}{5}} a^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}} b^{2}}\right)^5 = \frac{4a^2}{3b^{10}}.$$

Вотъ начало дробныхъ показателей количества. *И такъ числитель дробнаго показателя означаетъ въ какую степень должно возвесть количество, а знаменатель опредѣляетъ какой извлечь корень.*

249. Такъ какъ нѣтъ никакого количества, которое бы дало четную степень отрицательную, то по сему неможно извлечь изъ — a корня, четнымъ числомъ изображеннаго, то есть выраженіе $\sqrt[m]{-a}$, гдѣ m четное число, будетъ невозможное: таковые корни называются *невозможными*, *мнимыми*. Въ Алгебрѣ не одно изъ выраженій какъ дѣйствительныхъ такъ и мнимыхъ не опускается; потому что послѣднія сіи служатъ къ познанію несправедливости соотношеній, означенныхъ въ вопросѣ: сверхъ того можетъ иногда случится что чрезъ мнимыя выраженія достигнемъ до дѣйствительныхъ, помощію производства исчисленій надъ первыми производимыхъ.

Мнимые корни также могутъ быть изображаемы дробными показателями. На примѣръ $\sqrt{-a} = (-a)^{\frac{1}{2}}$; ибо $(\sqrt{-a})^2 = -a$, но такъже $((-a)^{\frac{1}{2}})^2 = (-a)^{\frac{2}{2}} = -a$. И такъ $\sqrt{-a} = (-a)^{\frac{1}{2}}$. Равномѣрно $\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}}$.

250. Такъ какъ $\sqrt[4]{a} = \pm a^{\frac{1}{4}}$, и $a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{a}} = \pm(\sqrt{a})^{\frac{1}{2}} = \pm(\pm a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{a}}$; то слѣдуетъ, что $\sqrt[4]{a} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{a}}$. И такъ корни четвертой степени суть: $+\sqrt{\sqrt{a}}$, $+\sqrt{-\sqrt{a}}$, $-\sqrt{\sqrt{a}}$, $-\sqrt{-\sqrt{a}}$, изъ коихъ только два $+\sqrt{\sqrt{a}}$ и $-\sqrt{\sqrt{a}}$ суть дѣйствительные.

Если въ выраженіи $\sqrt[m]{a}$ будетъ m степень числа 2, то есть $m = 2^r$ гдѣ r всякое цѣлое число представляетъ, то тогда выраженіе оное $\sqrt[m]{a}$ можетъ изображено быть чрезъ $\sqrt[2^r]{a}$; но $\sqrt[2^r]{a} = a^{\frac{1}{2^r}} = a^{(\frac{1}{2})^r} = a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot}$ и прочч. $=$

$$\pm\sqrt{\pm\sqrt[2^{r-1}]{a}} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt[2^{r-2}]{a}}} =$$

$$\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt[2^{r-3}]{a}}}} =$$

$$\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm \text{ и прочч. } \pm\sqrt{a}}}}.$$

Слѣдовательно

$$\sqrt[m]{a} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm \text{ и прочч. } \pm\sqrt{a}}}}.$$

Сіе намъ показываетъ, что корни коихъ показатели суть степени 2, могутъ всегда получаемы быть чрезъ постепенное извлеченіе квадратныхъ корней. Такимъ образомъ
$\sqrt[8]{6561} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$.

Равномѣрно когда въ выраженіи $\sqrt[m]{a}$ 1e. $m = 2^r p$, гдѣ p первое число, тогда будетъ $\sqrt[m]{a} = \sqrt[2^r p]{a} = a^{(\frac{1}{2})^r \frac{1}{p}} =$

$$\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm \text{ и прочч. } \sqrt[p]{a}}}};$$

2e если $m = 2^r n = 2^r qst$, гдѣ n произведеніе первыхъ чиселъ q, s, t, то $\sqrt[m]{a} = \sqrt[2^r n]{a} = \sqrt[2^r qst]{a} = a^{(\frac{1}{2})^r \times \frac{1}{q} \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{t}} =$

$$\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm \text{ и прочч. } \sqrt[q]{\sqrt[s]{\sqrt[t]{a}}}}}.$$

Такимъ образомъ:
$\sqrt[12]{531441} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{531441}}} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$.

251. Сложеніе и вычитаніе радикальныхъ количествъ производится на основаніи правилъ предписанныхъ для одночленныхъ количествъ. Такимъ образомъ сумма количествъ $3\sqrt[3]{ab}$, $5\sqrt[n]{c}$, $-2\sqrt{ab}$ равна $3\sqrt[3]{ab} + 5\sqrt[n]{c} - 2\sqrt{ab}$; сумма $2\sqrt[4]{a^2b}$, $5\sqrt[4]{a^2b}$, $-3\sqrt[4]{a^2b}$ равна $2\sqrt[4]{a^2b} + 5\sqrt[4]{a^2b} - 3\sqrt[4]{a^2b} = 7\sqrt[4]{a^2b} - 3\sqrt[4]{a^2b} = 4\sqrt[4]{a^2b}$. Разность между $5\sqrt[n]{a}$ и $2\sqrt{ab}$ равна $5\sqrt[n]{a} - 2\sqrt{ab}$; равномѣрно разность между $10\sqrt[3]{ab}$ и $-2\sqrt[3]{ab} = 10\sqrt[3]{ab} + 2\sqrt[3]{ab} = 12\sqrt[3]{ab}$.

252. $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$. Ибо сдѣлавши $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = x$, будетъ $x = a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{m}}$ и $x^m = ab$; слѣдовательно $x = \sqrt[m]{ab}$. И такъ $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$.

$\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n+p}}$. Ибо положивши $\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{a^p} = x$, будетъ $x = a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{p}{m}}$, $x^m = a^n a^p$, $x^m = a^{n+p}$, $x = a^{\frac{n+p}{m}} = \sqrt[m]{a^{n+p}}$. И такъ $\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n+p}}$.

$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$; ибо $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1^{\frac{1}{2}} \times -1^{\frac{1}{2}} = -1^{\frac{2}{2}} = -1$.

$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$. Ибо $\sqrt{-a} = -\sqrt{-1} \times a = -1^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$,

$\sqrt{-b} = \sqrt{-1} \times b = -1^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$, слѣдовательно $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -1^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} \times -1^{\frac{1}{2}} \times -b^{\frac{1}{2}} = -1^{\frac{2}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = -1 \times \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$.

$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$. Ибо $\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \times a = -1^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$; слѣдовательно $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -1^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} \times -1^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = -1 \times a = -a$

253. $5 \times \sqrt[3]{a} = 5\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{125\,a}$. Также $4 \times \sqrt[2]{3a} = 4\sqrt{3a} = \sqrt[2]{4^2 \cdot 3a} = \sqrt[2]{16 \cdot 3a} = \sqrt[2]{48a}$; $2b \times \sqrt[3]{2a^2} = \sqrt[3]{(2b)^3 \cdot 2a^2} = \sqrt[3]{8b^3 \cdot 2a^2} = \sqrt[3]{16a^2b^3}$; $2a^2 \times \sqrt{3a} = \sqrt{(2a^2)^2 \cdot 3a} = \sqrt{4a^4 \cdot 3a} = \sqrt{12a^5}$. И на оборотъ $\sqrt{12a^3b} = \sqrt{4a^2 \cdot 3ab} = \sqrt{4a^2} \times \sqrt{3ab} = 2a\sqrt{3ab}$; $\sqrt[3]{54a^5b^3} = \sqrt[3]{27a^3b^3 \cdot 2a^2} = \sqrt[3]{27a^3b^3} \times \sqrt[3]{2a^2} = 3ab\sqrt[3]{2a^2}$; $\sqrt[4]{a^9bc^4} = \sqrt[4]{a^8c^4 \cdot ab} = \sqrt[4]{a^8c^4} \times \sqrt[4]{ab} = a^2c\sqrt[4]{ab}$; $\sqrt[m]{2a^{m+2}} = \sqrt[m]{a^m \times 2a^2} = \sqrt[m]{a^m} \times \sqrt[m]{2a^2} = a\sqrt[m]{2a^2}$.

254. Чтобъ найти произведеніе $\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[p]{a^r} \times \sqrt[s]{a^t}$, говорю $\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[p]{a^r} \times \sqrt[s]{a^t} = a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{r}{p}} \times a^{\frac{t}{s}}$; приведя же дробные показатели къ одинакому знаменателю, тогда показатель радикала будетъ у всѣхъ количествъ общій; такимъ образомъ $\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[p]{a^r} \times \sqrt[s]{a^t} = a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{r}{p}} \times a^{\frac{t}{s}} = a^{\frac{nps}{mps}} \times a^{\frac{mrs}{mps}} \times a^{\frac{mtp}{mps}} = \sqrt[mps]{a^{nps}} \times \sqrt[mps]{a^{mrs}} \times \sqrt[mps]{a^{mtp}} = \sqrt[mps]{a^{nps+mps+mtp}}$. Равномѣрно будетъ 1е. $\sqrt[n]{a^r} \times \sqrt[n]{b^s} \times \sqrt[t]{c} = a^{\frac{r}{m}} b^{\frac{s}{n}} c^{\frac{1}{t}} = a^{\frac{nrt}{mnt}} b^{\frac{mst}{mnt}} c^{\frac{mn}{mnt}} = \sqrt[mnt]{a^{nrt}} \times \sqrt[mnt]{b^{mst}} \times \sqrt[nmt]{c^{mn}} = \sqrt[mnt]{a^{nrt} b^{mst} c^{mn}}$;

2е. $\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt{a^5} \times a = \sqrt[8]{a^6 . a^{20} . a^8} = \sqrt[8]{a^{34}}$; ибо $\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt{a^5} \times a = a^{\frac{3}{4}} . a^{\frac{5}{2}} . a = a^{\frac{6}{8}} . a^{\frac{20}{8}} . a^{\frac{8}{8}} = a^{\frac{34}{8}} = \sqrt[4]{a^{34}}$;

3е. $\sqrt{ab^3} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[5]{b^2c} = \sqrt[30]{a^{15} b^{45} \times a^{20} \times b^{12} c^6} = \sqrt[30]{a^{45} b^{57} c^6}$.

255. $(\sqrt[m]{a^p b^q})^n = \sqrt[m]{a^{pn} b^{qn}}$. Ибо $(\sqrt[m]{a^p b^q})^n = (a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}})^n = a^{\frac{pn}{m}} b^{\frac{qn}{m}} = \sqrt[m]{a^{pn} b^{qn}}$.

256. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$. Ибо назвавши частное x будетъ $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = x$, $\sqrt[m]{a} = x\sqrt[m]{b}$, по возведеніи же вторую степень $a = x^m b$, $x^m = \frac{a}{b}$, $x = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$. И такъ $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$.

$\frac{\sqrt[m]{-a}}{\sqrt[m]{-b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$. Ибо $\sqrt[m]{-a} = \sqrt[m]{-1} \times \sqrt[m]{a}$,

$\sqrt[m]{-b} = \sqrt[m]{-1} \times \sqrt[m]{b}$; слѣдовательно

$$\frac{\sqrt[m]{-a}}{\sqrt[m]{-b}} = \frac{\sqrt[m]{-1} \times \sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{-1} \times \sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

$$\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{a^r}} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{a^r}} = \sqrt[m]{a^{n-r}}.$$

257. $\frac{\sqrt[m]{a^r}}{\sqrt[n]{b^s}} = \frac{a^{\frac{r}{m}}}{b^{\frac{s}{n}}}$, но $\frac{a^{\frac{r}{m}}}{b^{\frac{s}{n}}} = \frac{a^{\frac{nr}{mn}}}{b^{\frac{ms}{mn}}} =$

$\frac{\sqrt[mn]{a^{nr}}}{\sqrt[mn]{b^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{nr}}{b^{ms}}}$. И такъ $\frac{\sqrt[m]{a^r}}{\sqrt[n]{b^s}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{nr}}{b^{ms}}}$.

По сей причинѣ 1е. $\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[r]{a^s}} = \sqrt[mr]{\frac{a^{nr}}{a^{ms}}} = \sqrt[mr]{a^{nr-ms}}$.

2е. $\frac{\sqrt[m]{a^n}}{a^p} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{a^{mp}}} = \sqrt[m]{a^{n-pm}}$.

258. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^r b^s}} = \sqrt[mn]{a^r b^s}$; Ибо $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^r b^s}} =$
$\sqrt[m]{a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}} = a^{\frac{r}{mn}} b^{\frac{s}{mn}} = \sqrt[mn]{a^r b^s}$.

Равномѣрно $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[r]{\sqrt[s]{a^q}}}} = \sqrt[mnrs]{a^q}$.

Такъ же. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{-a}} = \sqrt[mn]{-a}$; Ибо $\sqrt[m]{\sqrt[n]{-a}} =$
$\sqrt[m]{-a^{\frac{1}{n}}} = -a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{-a}$.

ГЛАВА XV.

О дѣйствіяхъ надъ составными радикальными количествами.

259. Зная дѣлать дѣйствія надъ одночленными количествами, легко оныя уже производить надъ составными, какъ-то все сіе ясно показываютъ слѣдующіе примѣры.

Примѣры

сложенія радикальныхъ количествъ.

I.

$$\begin{array}{l} 10\sqrt{2} + 5\sqrt[7]{8} - 7\sqrt[m]{5} + 2\sqrt[3]{a} \\ 5\sqrt{2} + \sqrt[7]{8} + 4\sqrt[m]{5} - 3\sqrt[3]{a} \\ -3\sqrt{2} - 9\sqrt[7]{8} - 3\sqrt[m]{5} + \sqrt[3]{a} + \sqrt{ab} \\ \hline 12\sqrt{2} - 3\sqrt[7]{8} - 6\sqrt[m]{5} + \sqrt{ab} \ \ldots\ \text{сумма.} \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{l} 13\sqrt[5]{12} + 17\sqrt[m]{3} - 5\sqrt[n]{6} \\ 7\sqrt[5]{12} + 2\sqrt[m]{3} + 4\sqrt[n]{6} - \frac{3}{5}\sqrt{a} + \sqrt[3]{96} \\ -5\sqrt[5]{12} - 8\sqrt[m]{3} - 2\sqrt[n]{6} - \frac{2}{5}\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{96} \\ \hline 15\sqrt[5]{12} + 11\sqrt[m]{3} - 3\sqrt[n]{6} - \sqrt{a} - 2\sqrt[3]{96}\ .\ \text{сумма.} \end{array}$$

Примѣры

вычитанія радикальныхъ количествъ.

I.

$$m\sqrt[p]{a^q} - n\sqrt[7]{a^s} + c\sqrt[3]{a^p} - 19\sqrt[4]{b^n}$$

$$\mp n\sqrt[p]{a^q} \pm 5n\sqrt[7]{a^s} \mp 3b\sqrt[3]{a^p} \mp 5d\sqrt[4]{b^n}$$

$$(m-n)\sqrt[p]{a^q} + 4n\sqrt[7]{a^s} + (c-3b)\sqrt[3]{a^p} - (19+5d)\sqrt[4]{b}$$ .... разность.

II.

$$10\sqrt{5} - 5\sqrt[3]{a^2} + 8\sqrt{a}.\sqrt[3]{b} - 2\sqrt[m]{a^n} - \tfrac{2}{5}\sqrt[p]{2ab^r}$$

$$\pm 2\sqrt{5} \pm 2\sqrt[3]{a^2} \mp 3\sqrt{a}.\sqrt[3]{b} \mp 4\sqrt[m]{a^n} \pm \tfrac{2}{5}\sqrt[p]{2ab^r}$$

$$12\sqrt{5} - 3\sqrt[3]{a^2} + 5\sqrt{a}.\sqrt[3]{b} - 6\sqrt[m]{a^n}$$ .... разность.

III.

$$
\begin{array}{l}
4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 4\sqrt{6} \\
\mp 1 \mp 2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{3} \pm 5\sqrt{5} \pm 6\sqrt{6} \\
\hline
5 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 10\sqrt{6}
\end{array}
$$
разность.

Примѣры

умноженїя радикальныхъ количествъ.

I.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{xz} - \sqrt[3]{yz} \\
\qquad\qquad\qquad \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z} \\
\hline
x + \sqrt[3]{xy^2} + \sqrt[3]{xz^2} + \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{x^2z} - \sqrt[3]{xyz} \\
-\sqrt[3]{x^2y} - y - \sqrt[3]{yz^2} - \sqrt[3]{xy^2} - \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{y^2z} \\
-\sqrt[3]{x^2z} - \sqrt[3]{y^2z} - z - \sqrt[3]{xyz} - \sqrt[3]{xz^2} + \sqrt[3]{yz^2} \\
\hline
x - y - z - 3\sqrt[3]{xyz}
\end{array}
$$
. . . . . . произведенїе.

II.

$$
\begin{array}{l}
\frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}} \\
3a + \sqrt{\frac{ab^2}{c}} \\
\hline
\frac{6a^2x}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} \\
\quad + \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{ab^2}{c}} - \sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}} \\
\hline
\frac{6a^2x}{c} + \left(\frac{2abx}{c} - 3a^2\right)\sqrt{\frac{a}{c}} - \frac{a^2b^2}{c}.
\end{array}
$$

III.

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad +\sqrt{2}+2 \\ \hline 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}. \end{array}$$

IV.

$$\begin{array}{l} 4+2\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \\ \hline 8+4\sqrt{2} \\ \quad -4\sqrt{2}-4 \\ \hline 8-4=4. \end{array}$$

V.

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +1-\sqrt{-3} \\ \quad -\sqrt{-3}-3 \\ \hline +1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3}. \end{array}$$

VI.

$$\begin{array}{l} -2-2\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +2+2\sqrt{-3} \\ \quad -2\sqrt{-3}+6 \\ \hline +2+6=8. \end{array}$$

Примѣръ

дѣленія радикальныхъ количествъ.

$$
\begin{array}{l}
x - y - z - 3\sqrt[3]{xyz} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z} \\ \hline \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{xz} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{z^2} \end{array} \right. \\
\underline{-x + \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{x^2z}} \\
\quad + \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{x^2z} - 3\sqrt[3]{xyz} - y - z \\
\quad \underline{- \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2} + \sqrt[3]{xyz}} \\
\qquad + \sqrt[3]{x^2z} + \sqrt[3]{xy^2} - 2\sqrt[3]{xyz} - y - z \\
\qquad \underline{- \sqrt[3]{x^2z} + \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{xz^2}} \\
\qquad\quad + \sqrt[3]{xy^2} - \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{xz^2} - y - z \\
\qquad\quad \underline{- \sqrt[3]{xy^2} + y + \sqrt[3]{y^2z}} \\
\qquad\qquad - \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{xz^2} - \sqrt[3]{y^2z} - z \\
\qquad\qquad \underline{+ \sqrt[3]{xyz} - \sqrt[3]{y^2z} - \sqrt[3]{yz^2}} \\
\qquad\qquad\quad + \sqrt[3]{xz^2} - \sqrt[3]{yz^2} - z \\
\qquad\qquad\quad \underline{- \sqrt[3]{xz^2} + \sqrt[3]{yz^2} + z} \\
\end{array}
$$

Примѣръ

дѣленїя количествъ съ дробными показателями.

$$\begin{array}{l} cf + afx^{\frac{3}{5}} - cgx^{-\frac{2}{5}} - (ag + bf)\, x^{\frac{1}{5}} + bgx^{-\frac{1}{5}} \left\{ \dfrac{f - gx^{-\frac{2}{5}}}{c + ax^{\frac{3}{5}} - bx^{\frac{1}{5}}} \right. \\ \underline{- cf + cgx^{-\frac{2}{5}}} \\ \quad + afx^{\frac{3}{5}} - (ag + bf)\, x^{\frac{1}{5}} + bgx^{-\frac{1}{5}} \\ \quad \underline{- afx^{\frac{3}{5}} + agx^{\frac{1}{5}}} \\ \qquad - bfx^{\frac{1}{5}} + bgx^{-\frac{1}{5}} \\ \qquad \underline{+ bfx^{\frac{1}{5}} - bgx^{-\frac{1}{5}}} \\ \qquad\quad '' \quad '' \quad '' \end{array}$$

Примѣры

извлеченія квадратныхъ и кубическихъ корней.

260. Знавши правила извлеченія всякихъ корней изъ одночленныхъ количествъ, мы можемъ извлекать квадратныя и кубическія корни изъ составныхъ количествъ, въ которыя входятъ высшія степени одночленныхъ количествъ.

I.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1} & a^2 + a + 1 \\
-a^4 & \\
\quad + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 & 2a^2 + a \\
\quad - 2a^3 - a^2 & \qquad\quad a \\
\qquad + 2a^2 + 2a + 1 & 2a^2 + 2a + 1 \\
\qquad - 2a^2 - 2a - 1 & \qquad\qquad + 1 \\
\qquad\quad // \quad // &
\end{array}
$$

II.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4} & a^2 - 2ab - 2b^2 \\
a^4 & \\
\quad - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4 & 2a^2 - 2ab \\
\quad + 4a^3b - 4a^2b^2 & \qquad - 2ab \\
\qquad - 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 & 2a^2 - 4ab - 2b^2 \\
\qquad + 4a^2b^2 - 8ab^3 - 4b^4 & \qquad\qquad - 2b^2 \\
\qquad\quad // \quad // &
\end{array}
$$

III.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6} & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
\underline{a^6} & \\
- 6a^5b + 15a^4b^2 & \overline{2a^3 - 3a^2b} \\
\underline{+ 6a^5b - 9a^4b^2} & \underline{- 3a^2b} \\
+ 6a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 & 2a^3 - 6a^2b + 3ab^2 \\
\underline{- 6a^4b^2 + 18a^3b^3 - 9a^2b^4} & \underline{+ 3ab^2} \\
- 2a^3b^3 + 6a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 & 2a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - b^3 \\
\underline{+ 2a^3b^3 - 6a^2b^4 + 6ab^5 - b^6} & - b^3
\end{array}
$$

IV.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{a^2b - \frac{4}{3}ac\sqrt{ab} + \frac{4}{9}ac^2 + a^2\sqrt{bc} - \frac{2}{3}ac\sqrt{ac} + \frac{1}{4}a^2c} & a\sqrt{b} - \frac{2}{3}c\sqrt{a} + \frac{1}{2}a\sqrt{c} \\
\underline{- a^2b} & \\
- \frac{4}{3}ac\sqrt{ab} + \frac{4}{9}ac^2 & \overline{2a\sqrt{b} - \frac{2}{3}c\sqrt{a}} \\
\underline{+ \frac{4}{3}ac\sqrt{ab} - \frac{4}{9}ac^2} & \underline{- \frac{2}{3}c\sqrt{a}} \\
+ a^2\sqrt{bc} - \frac{2}{3}ac\sqrt{ac} + \frac{1}{4}a^2c & 2a\sqrt{b} - \frac{4}{3}c\sqrt{a} + \frac{1}{2}a\sqrt{c} \\
\underline{- a^2\sqrt{bc} + \frac{2}{3}ac\sqrt{ac} - \frac{1}{4}a^2c} & + \frac{1}{2}a\sqrt{c} \\
\quad '' \quad '' &
\end{array}
$$

V.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{a^{-2} + 6a^{-1}b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{-\frac{2}{3}} - 4a^{-1}c^{-\frac{1}{2}} - 12b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{2}} + 4c^{-1}} & a^{-1} + 3b^{-\frac{1}{3}} - 2c^{-\frac{1}{2}} \\
\underline{- a^{-2}} & \\
+ 6a^{-1}b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{-\frac{2}{3}} & \overline{2a^{-1} + 3b^{-\frac{1}{3}}} \\
\underline{- ba^{-1}b^{-\frac{1}{3}} - 9b^{-\frac{2}{3}}} & \underline{3b^{-\frac{1}{3}}} \\
- 4a^{-1}c^{-\frac{1}{2}} - 12b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{2}} + 4c^{-1} & 2a^{-1} + 6b^{-\frac{1}{3}} - 2c^{-\frac{1}{2}} \\
\underline{+ 4a^{-1}c^{-\frac{1}{2}} + 12b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{2}} - 4c^{-1}} & \underline{- 2c^{-\frac{1}{2}}} \\
\quad '' \quad '' \quad '' &
\end{array}
$$

VI.

$$\sqrt{a+b} \;\Big|\; \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8a\sqrt{a}} + \frac{b^3}{16a^2\sqrt{a}} \text{ корень.}$$

$$-a$$

$$+b \;\Big|\; 2\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

$$-b - \frac{b^2}{4a} \;\Big|\; + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

$$-\frac{b^2}{4a} \;\Big|\; 2\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8a\sqrt{a}}$$

$$+\frac{b^2}{4a} + \frac{b^3}{8a^2} - \frac{b^4}{64a^3} \;\Big|\; -\frac{b^2}{8a\sqrt{a}}$$

$$\frac{b^3}{8a^2} - \frac{b^4}{6a^3} \;\Big|\; 2\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \frac{b^2}{4a\sqrt{a}} + \frac{b^3}{16a^2\sqrt{a}}$$

$$-\frac{b^3}{8a^2} \text{ и проч.} \;\Big|\; + \frac{b^3}{16a^2\sqrt{a}}$$

И такъ

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8a\sqrt{a}} + \frac{b^3}{16a^2\sqrt{a}} \text{ — и проч.}$$

$$= \sqrt{a}\left(1 + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^2} + \frac{b^3}{16a^3} \text{ — и проч.}\right)$$

VII.

$$\sqrt[3]{8a^6 - 36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6} \;\Big|\; 2a^2 - 3b^2 \text{ корень}$$

$$8a^6$$

$$-36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6 \;\Big|\; 12a^4$$

$$-8a^6 + 36a^4b^2 - 54a^2b^4 + 27b^6$$

$$2a^2 - 3b^2$$
$$2a^2 - 3b^2$$
$$4a^4 - 6a^2b^2$$
$$-6a^2b^2 + 9b^4$$
$$4a^4 - 12a^2b^2 + 9b^4$$
$$2a^2 - 3b^2$$
$$8a^6 - 24a^8b^2 + 18a^2b^4$$
$$-12a^4b^2 + 36a^2b^4 - 27b^6$$
$$8a^6 - 36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6$$

VIII.

$$\sqrt[3]{a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1} \;\Big|\; a^2 - 2a + 1$$

$$-a^6$$

$$-6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \;\Big|\; 3a^4$$

$$-a^6 + 6a^5 - 12a^4 + 8a^3$$

$$+3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \;\Big|\; 3a^4 - 12a^3 + 12a^2$$

$$-a^6 + 6a^5 - 15a^4 + 20a^3 - 15a^2 + 6a - 1$$

$$
\begin{array}{l}
a^2 - 2a \\
a^2 - 2a \\
\hline
a^4 - 2a^3 \\
\quad - 2a^3 + 4a^2 \\
\hline
a^4 - 4a^3 + 4a^2 \\
\qquad\quad a^2 - 2a \\
\hline
a^6 - 4a^5 + 4a^4 \\
\quad - 2a^5 + 8a^4 - 8a^3 \\
\hline
a^6 - 6a^5 + 12a^4 - 8a^3
\end{array}
$$

==

$$
\begin{array}{l}
a^2 - 2a + 1 \\
a^2 - 2a + 1 \\
\hline
a^4 - 2a^3 + a^2 \\
\quad - 2a^3 + 4a^2 - 2a \\
\qquad\qquad + a^2 - 2a + 1 \\
\hline
a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 \\
\qquad\qquad\qquad a^2 - 2a + 1 \\
\hline
a^6 - 4a^5 + 6a^4 - 4a^3 + a^2 \\
\quad - 2a^5 + 8a^4 - 12a^3 + 8a^2 - 2a \\
\qquad\qquad + a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 \\
\hline
a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1
\end{array}
$$

IX.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt[3]{x^6 + 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6} & x^2 + 2bx + 3b^2 \\
-x^6 & \\
\hline
\quad + 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6 & 3x^4 \\
-x^6 - 6bx^5 - 12b^2x^4 - 8b^3x^3 & \\
\hline
\quad + 9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6 & 3x^4 + 12bx^3 + 12b^2x^2 \\
-x^6 - 6bx^5 - 21b^2x^4 - 44b^3x^3 - 63b^4x^2 - 54b^5x - 27b^6 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l}
x^2 + 2bx \\
x^2 + 2bx \\
\hline
x^4 + 2bx^3 \\
\quad + 2bx^3 + 4b^2x^2 \\
\hline
x^4 + 4bx^3 + 4b^2x^2 \\
\qquad\qquad x^2 + 2bx \\
\hline
x^6 + 4bx^5 + 4b^2x^4 \\
\quad + 2bx^5 + 8b^2x^4 + 8b^3x^3 \\
\hline
x^6 + 6bx^5 + 12b^2x^4 + 8b^3x^3
\end{array}$$

==

$$\begin{array}{l}
x^2 + 2bx + 3b^2 \\
x^2 + 2bx + 3b^2 \\
\hline
x^4 + 2bx^3 + 3b^2x^2 \\
\quad + 2bx^3 + 4b^2x^2 + 6b^3x \\
\qquad\qquad + 3b^2x^2 + 6b^3x + 9b^4 \\
\hline
x^4 + 4bx^3 + 10b^2x^2 + 12b^3x + 9b^4
\end{array}$$

==

$$\begin{array}{l}
x^4 + 4bx^3 + 10b^2x^2 + 12b^3x + 9b^4 \\
\qquad\qquad x^2 + 2bx + 3b^2 \\
\hline
x^6 + 4bx^5 + 10b^2x^4 + 12b^3x^3 + 9b^4x^2 \\
\quad + 2bx^5 + 8b^2x^4 + 20b^3x^3 + 24b^4x^2 + 18b^5x \\
\qquad + 3b^2x^4 + 12b^3x^3 + 30b^4x^2 + 36b^5x + 27b^6 \\
\hline
x^6 + 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6
\end{array}$$

X.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt[3]{a - 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} - b} & \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \\
-a & \\
\cline{1-1}
\quad -3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} - b & 3\sqrt[3]{a^2} \\
-a + 3\sqrt[3]{a^2b} - 3\sqrt[3]{ab^2} + b & \\
\hline
\end{array}$$

==

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \\
\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \\
\hline
\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} \\
\quad - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} \\
\hline
\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} \\
\qquad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \\
\hline
\sqrt[3]{a^3} - 2\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} \\
\quad - \sqrt[3]{a^2b} + 2\sqrt[3]{ab^2} - \sqrt[3]{b^3} \\
\hline
a - 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} - b
\end{array}$$

ГЛАВА XV.

О преложеніи и соединеніи буквъ.

261. ***Преложеніемъ*** буквъ (permutation) называется способъ ставить буквы, коихъ число дано, одну возлѣ другой всевозможными образами.

262. Двѣ буквы, какъ a, b, подвержены двумъ переложеніямъ, а именно ab и ba.

Когда возьмемъ третію букву c, то, поелику оную въ каждомъ изъ оныхъ двухъ переложеній поставить можно на трехъ мѣстахъ, число переложеній трехъ буквъ $= 6 = 1.2.3$, и оныя суть: abc, acb, cab, bca, cba, bac.

Изъ сего видно, что число переложеній четырехъ буквъ $a, b, c, d = 1.\ 2.\ 3.\ 4. = 24$. Число переложеній пяти буквъ $= 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5. = 120$; и такъ далѣе.

Вообще когда число буквъ $= n$, то число ихъ переложеній $= 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6. \ldots\ldots n$.

Въ самомъ дѣлѣ, если вообразимъ, что составлены всѣ возможныя переложенія изъ $n-1$ буквъ, то для сысканія всѣхъ переложеній изъ n буквъ, надобно новую букву поставить въ каждомъ изъ тѣхъ $n-1$ переложеній на всѣхъ возможныхъ мѣстахъ; и какъ число таковыхъ мѣстъ $= n$, то слѣдуетъ, что число переложеній, составленныхъ изъ n буквъ, въ n разъ больше, нежели число переложеній составленныхъ изъ $n-1$ буквъ.

И такъ пусть $x, x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots x_{n-1}$ означаютъ число переложеній изъ буквъ числомъ: $n, n-1, n-2, n-3, n-4 \ldots\ldots 1$; то будетъ

$$\begin{aligned}
x &= nx_1 \\
x_1 &= (n-1)\,x_2 \\
x_2 &= (n-2)\,x_3 \\
x_3 &= (n-3)\,x_4 \\
x_4 &= (n-4)\,x_5 \\
&\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= 1 = n-(n-1);
\end{aligned}$$

Перемножа всѣ сіи уравненія между собою, и происшедшее уравненіе раздѣливши на

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \ldots\ldots x_{n-1}$, получимъ

$$x = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\ldots\ldots n-(n-1).$$

Выраженіе сіе можно представить такъ:

$$x = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots\ldots (n-2)\,(n-1)n.$$

Слѣдовательно если $n=24$, то число переложеній сихъ 24хъ буквъ будетъ $= 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10.\ 11.\ 12.\ 13.\ 14.\ 15.\ 16.\ 17.\ 18.\ 19.\ 20.\ 21.\ 22.\ 23.\ 24. =$

$$620448401733239439360000.$$

263. Если между сими буквами будутъ находится одинакія; на примѣръ, когда будетъ p одинакихъ буквъ, то отъ нихъ произойдетъ число $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots\ldots p$ совершенно одинакихъ

переложенiй; и слѣдовательно число различныхъ между собою переложенiй всѣхъ буквъ будетъ =

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ldots\ n.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ p.}$$

Вообще, когда $m + p + q + r + \ldots = n$, то число переложенiй, кои произойти могутъ отъ буквъ $a^m\,b^p\,c^q\,d^r\ldots\ldots$ будетъ =

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ldots\ n}{1.2.3\ldots m.\ 1.2.3\ldots p.\ 1.2.3\ldots q.\ 1.2.3\ldots r.\ldots}$$

На примѣръ число переложенiй, кои составить можно изъ выраженiя $a^2\,b$ или aab, будетъ $= \frac{1.\ 2.\ 3.}{1.\ 2.} = 3$, и именно оныя суть: aab, aba, baa. Число переложенiй, кои составить можно изъ выраженiя $a^3\,b^2 = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{1.\ 2.\ 3.\ 1.\ 2} = 10$.

264. *Соединенiемъ* буквъ (combinaison) называется способъ находить всѣ перемѣщенiя, каковыя составить можно изъ даннаго числа буквъ, совокупляя оныя по двѣ, по три, по четыре, и проч.

265. Соединенiя могутъ быть съ повторенiемъ и безъ повторенiя; то есть можно составить соединенiя изъ данныхъ буквъ, соединяя ихъ и самихъ съ собою, или ни которую не соединяя саму съ собою.

Пусть будетъ буквъ a, b, c, d, и проч. числомъ n, и требуется опредѣлить всѣ возможныя соединенiя изъ сихъ буквъ, взятыхъ по

двѣ, по три, по четыре, и вообще по числу m буквъ, соединяя при томъ каждую букву и саму съ собою.

Ясно, что когда соединять будемъ данныя буквы по двѣ, то (поелику каждая буква соединяется сама съ собою и совсѣми прочими буквами) каждая буква даетъ n соединенiй; а потому всѣ буквы дадутъ n^2 соединенiй. На примѣръ всевозможныя соединенiя съ повторенiемъ, кои составить можно изъ трехъ буквъ a, b, c, соединяя ихъ по двѣ, суть:

aa, ab, ac; bb, ba, bc; cc, ca, cb.

Чтобъ тѣ же буквы соединить по три, надлежитъ каждую изъ нихъ соединить съ каждымъ изъ предыдущихъ соединенiй по двѣ буквы; по сей причинѣ число соединенiй изъ n буквъ по три будетъ $n^2 n = n^3$.

Вообще ясно, что число всевозможныхъ соединенiй съ повторенiями, составленныхъ изъ n буквъ, бравъ въ каждое соединенiе по m буквъ, будетъ $= n^m$.

Въ самомъ дѣлѣ пусть x, x_1, x_2, x_3, $x_4 \ldots x_{m-1}$ число всемозможныхъ соединенiй съ повторенiями изъ n буквъ взятыхъ по m, $m-1$, $m-2$, $m-3$, $m-4 \ldots\ldots m-(m-1)$; то будетъ:

$$x = nx_1$$
$$x_1 = nx_2$$
$$x_2 = nx_3$$
$$x_3 = nx_4$$
$$x_4 = nx_5$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_{m-1} = n.$$

Перемножа сїи уравненїя и раздѣливши обѣ части на $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5 \ldots\ldots x_{m-1}$, получимъ

$$x = n^m;$$

поелику число уравненїй есть m.

266. Станемъ теперь соединять тѣже самыя буквы, но небудемъ соединять ни которую букву саму съ собою. Ясно, что для соединенїя по двѣ буквы, падлежитъ каждую букву соединить со всѣми остальными, которыхъ число $n-1$; слѣдовательно отъ каждой буквы произойдетъ число n соединенїй по двѣ буквы; а потому всѣ буквы дадутъ $n(n-1)$ соединенїй.

Составя сїи соединенїя по двѣ буквы, соединимъ оныя съ каждою изъ остальныхъ буквъ, которыхъ число $n-2$; то произойдутъ соединенїя по три буквы, и число оныхъ будетъ

$$n(n-1)(n-2).$$

Вообще пусть $x, x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_{m-1}$ означаютъ число соединенїй изъ буквъ n по m, $n-1$ по $m-1$, $n-2$ по $m-2$, $n-3$ по $m-3$ ...... $n-(m-1)$ по $m-(m-1)$ бравъ буквъ для соединенїя; то будетъ

$$x = nx_1$$
$$x_1 = (n-1)\,x_2$$
$$x_2 = (n-2)\,x_3$$
$$x_3 = (n-3)\,x_4$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_{m-1} = n-(m-1);$$

откуда слѣдуетъ

$$x = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots n-(m-1)$$

267. Когда положимъ $m=n$, то получимъ всевозможныя соединенїя изъ n буквъ, взятыхъ по n, то есть получимъ число всевозможныхъ переложенїй

$$x = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 1$$

найденное выше въ членѣ 262.

268. Сїи два рода соединенїй, то есть всевозможныя соединенїя съ повторенїемъ и безъ повторенїя *Гинденбургъ* называетъ *измѣненїями* (*variations*); собственно же соединенїями называетъ онъ тѣ соединенїя, въ которыхъ принимаются въ разсужденїе токмо различныя между собою соединенїя: то есть такїя, кои несостоятъ изъ тѣхъ же буквъ: сїи различныя

соединенія могутъ также быть съ повтореніями и безъ повтореній.

269. Чтобъ найти различныя соединенія изъ n буквъ съ повтореніями, примѣчаю что когда каждая изъ буквъ соединится со всѣми данными буквами и сверхъ того еще разъ сама съ собою, то отъ каждой произойдетъ число $n+1$ соединеній по двѣ буквы, и слѣдовательно отъ всѣхъ буквъ будетъ $n(n+1)$ соединеній; но какъ здѣсь каждое соединеніе повторяется два раза, какъ то: аа и аа, ab и ba, bc и cb; то по сей причинѣ число различныхъ соединеній, составленныхъ изъ n буквъ, взятыхъ по двѣ $= \frac{n(n+1)}{1.2}$. Если теперь всѣ сіи соединенія соединятся съ данными буквами и сверхъ того съ каждою изъ двухъ буквъ, кои въ нихъ содержатся, то получимъ число $\frac{n(n+1)}{1.2}(n+2)$ соединеній по три буквы; но здѣсь каждое соединеніе входитъ три раза, какъ то: ааа, ааа, ааа; по сему число различныхъ соединеній по три буквы будетъ $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.}$. Отсюда очевидно, что вообще число различныхъ соединеній съ повтореніями изъ n буквъ взятыхъ по m буквъ $=$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+(m-1))}{1.2.3.4.5.\ldots\ldots m}$$

270. Мы видѣли, что число всевозможныхъ соединеній безъ повтореній, составленныхъ изъ n буквъ, взятыхъ по $m = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-(m-1))$, и что m буквъ подвержены числу $1.2.3.4.5.\ldots\ldots m$ переложе-

ній; по сему число различныхъ соединеній безъ повтореній, составленныхъ изъ n буквъ взятыхъ по m, будетъ $=$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(m-1))}{1.2.3.4.\ldots\ldots m}$$

И такъ число различныхъ соединеній безъ повтореній, составленныхъ изъ n буквъ взятыхъ по 2, будетъ

$$\frac{n(n-1)}{1.2};$$

взятыхъ по три

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3};$$

взятыхъ по четыре

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4};$$

и такъ далѣе.

Разсмотрѣвши теорію переложенія и соединенія буквъ, приступимъ теперь къ изслѣдованію теоріи и употребленія способа возводить составное количество во всякую степень; то есть теоріи, извѣстной подъ именемъ *Невтонова бинома.*

ГЛАВА XVI.

О составленіи степеней и извлеченіи корней изъ составныхъ количествъ.

271. *Возвесть количество* $x+a$ *въ* n *степень, или разложить на члены формулу* $(x+a)^n$, гдѣ n есть цѣлое и положительное число, не иное что значитъ, какъ сыскать члены произведенія $(x+a)(x+a)(x+a)\ldots$ состоящаго изъ n равныхъ факторовъ.

272. Чтобъ удобнѣе открыть законъ, коему слѣдуютъ члены произведенія $(x+a)(x+a)\ldots$ мы положимъ сперва, что факторы сіи неравны, и станемъ искать члены произведенія $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots$ Умножая сіи факторы поперемѣнно между собою, мы найдемъ

$$\begin{array}{llll}
x+a & & & \\
x+b & & & \\
\hline
x^2+ax & +ab & & \\
+bx & & & \\
x+c & & & \\
\hline
x^3+ax^2 & +abx & +abc & \\
+bx^2 & +acx & & \\
+cx^2 & +bcx & & \\
x+d & & & \\
\hline
x^4+ax^3 & +abx^2 & +abcx & +abcd \\
+bx^3 & +acx^2 & +abdx & \\
+cx^3 & +bcx^2 & +acdx & \\
+dx^3 & +adx^2 & +bcdx & \\
 & +bdx^2 & & \\
 & +cdx^2 & & \\
\end{array}$$

или, давши иной видъ симъ произведеніямъ, будетъ

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab\,;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc\,;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+bc+ad+bd+cd)x^2 + (abc+abd+bcd)x + abcd\,;$$

и такъ далѣе.

Отсюда видно:

1^е. Что первой членъ каждаго произведенія состоитъ изъ перваго члена x общаго всѣмъ двучленнымъ количествамъ, возведеннаго въ такую степень сколько находится факторовъ произведенія.

2^е. Потомъ въ прочихъ членахъ показатели перваго члена x, общаго всѣмъ двучленнымъ количествамъ, уменьшаются *единицею*; такъ что въ послѣднемъ членѣ его уже ненаходится.

3^е. Коеффиціентъ втораго члена произведенія есть сумма вторыхъ членовъ двучленныхъ количествъ a, b, c и проч.

4^е. Коеффиціентъ третьяго члена есть сумма различныхъ соединеній безъ повтореній изъ буквъ вторыхъ членовъ взятыхъ по двѣ.

5^е. Коеффиціентъ четвертаго члена есть сумма различныхъ соединеній безъ повтореній изъ тѣхъ же самыхъ буквъ a, b, c, и проч. взятыхъ по три; и такъ далѣе до послѣдняго члена, которой есть произведенїе всѣхъ вторыхъ членовъ a, b, c, и проч.

6е. Число членовъ больше всегда единицею, чемъ число факторовъ.

273. Мы примѣчаемъ, что сей законъ имѣетъ мѣсто при нѣкоторомъ числѣ факторовъ $x+a$, $x+b$, $x+c$, и проч.; но легко доказать, что оный равно имѣетъ мѣсто сколько бы сихъ факторовъ небыло; и именно для сего надобно только показать, что ежели законъ сей справедливъ при нѣкоторомъ извѣстномъ числѣ n факторовъ, то оный равно справедливъ и при числѣ $n+1$ факторовъ.

Въ самомъ дѣлѣ пусть будетъ

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots\dots(x+\beta) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \dots Px + Q,$$

гдѣ число факторовъ n, и при томъ

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + \dots\dots \beta \\ B &= ab + ac + a\beta + \dots\dots \\ C &= abc + ab\beta + \dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q &= abc \dots\dots\dots\dots \beta. \end{aligned}$$

Умноживъ произведенїе $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \dots Px + Q$ на $x+f$, получимъ $(x+a)(x+b)(x+c)\dots\dots(x+\beta)(x+f) = x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots\dots Px^2 + Qx + fx^n + fAx^{n-1} + fBx^{n-2} + \dots fPx + fQ$;

гдѣ показатели x постепенно уменьшаются единицею; а коеффицїенты членовъ суть:

$$\begin{aligned} A + f &= a + b + c + \dots\dots\dots\dots \beta + f \\ B + fA &= ab + ac + \dots\dots + af + bf + \dots \\ C + fB &= abc + \dots + ab\beta \dots + acf + abf + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ fQ &= abc. \dots\dots\dots\dots \beta; \end{aligned}$$

И такъ, поелику мы видѣли, что законъ оный имѣетъ мѣсто, когда число факторовъ, на примѣръ: $=4$, то изъ доказаннаго нами теперь слѣдуетъ, что сей законъ имѣетъ мѣсто когда число факторовъ $=5$, и слѣдовательно когда $=6$, и вообще когда $=n$, полагая n числомъ цѣлымъ и положительнымъ.

274 И такъ если n будетъ факторовъ $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, и проч. то произведенїе ихъ можетъ быть изображено

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \dots Px + Q;$$

поелику здѣсь A равно суммѣ вторыхъ членовъ a, b, c, и проч. факторовъ двучленныхъ количествъ, $B =$ суммѣ ихъ перемноженныхъ различнымъ образомъ по два, $C =$ суммѣ ихъ же перемноженныхъ различно по три; и такъ далѣе до Q, которое равно произведенїю всѣхъ ихъ, то формула сїя можетъ изображена быть такъ:

$x^n + a$	$x^{n-1} + ab$	$x^{n-2} + abc$	$x^{n-3} \ldots + abcde \ldots \beta$
$+ b$	$+ ac$	$+ abd$	
$+ c$	$+ ad$	$+ acd$	
$+ d$	$+ bc$	$+ bcd$	
$+ e$	$+ bd$	$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$		
$+ \beta$	$\ldots$		

Положивши здѣсь $a = b = c = d =$ и проч., то есть вторые члены двучленныхъ факторовъ равными, тогда сїе произведенїе изобразится какъ означено ниже, и будетъ произведенїе n равныхъ двучленныхъ факторовъ $x+a$, или иначе сказать будетъ $n^{ая}$ степень изъ $x+a$.

$x^n + a$	$x^{n-1} + a^2$	$x^{n-2} + a^3$	$x^{n-1} + \ldots + a^n$
$+ a$	$+ a^2$	$+ a^3$	
$+ a$	$+ a^2$	$+ a^3$	
$+ a$	$+ a^2$	$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$		
и проч.	и проч.	и проч.	

Здѣсь 1ᵉ. Первой членъ равенъ первому члену x двучленнаго количества, возведенному въ требуемую степень; 2ᵉ. Второй членъ равенъ x^{n-1}, помноженному на сумму вторыхъ членовъ, то есть на na; 3ᵉ. Третїй членъ $= x^{n-2}$, помноженному на a^2, взятой столько разъ, сколько можно составить различныхъ соединенїй безъ повторенїй по два бравъ изъ n факторовъ, то есть $\frac{n\,(n-1)}{1.\,2.}$, 4ᵉ. Четвертой членъ $= x^{n-1}$, по-

множенному на a^3 взятой столько разъ, сколько можно составить изъ n факторовъ различныхъ соединенїй безъ повторенїй, бравъ, по три то есть на $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.\,2.\,3}$; и такъ далѣе до послѣдняго члена, которой равенъ a^n.

И такъ $(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n.\,(n-1)}{1.\,2} a^2 x^{n-2} + \frac{n.\,(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.} a^3 x^{n-3} + \frac{n.\,(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4.} a^4 x^{n-4} \ldots\ldots + a^n$.

Вотъ общая формула для возведенїя двучленнаго количества во всякую степень, когда показатель ея есть цѣлое и положительное число.

275. Найденная формула показываетъ, что коеффицїентъ каждаго члена ея, на примѣръ $4^й$, равенъ показателю $n-2$ предыдущаго члена x, помноженному на коеффицїентъ его $\frac{n.\,(n-1)}{1.\,2}$, и раздѣленному на число до него членовъ, то есть на 3.

276. Сдѣлаемъ принаровленїе сысканной формулы $(x+a)^n$. Пусть требуется $a+b$ возвесть въ $10^{ю}$ степень.

Будетъ I. Членъ $= a^{10}$

II. — $= 10ba^9$

III. — $= \frac{10.\,9}{2.} b^2 a^8 = 45b^2 a^8$

IV. — $= \frac{10.\,9.\,8}{2.\,3} b^3 a^7 = 120b^3 a^7$

V. — $= \frac{10.\,9.\,8.\,7}{2.\,3.\,4} b^4 a^6 = 210b^4 a^6$

VI. — $= \frac{10.\,9.\,8.\,7.\,6}{2.\,3.\,4.\,5} b^5 a^5 = 252b^5 a^5$

VII. — $= \frac{10.9.8.7.6.5}{2.3.4.5.6} b^6 a^4 = 210 b^6 a^4$

VIII. — $= \frac{10.9.8.7.6.5.4}{2.3.4.5.6.7} b^7 a^3 = 120 b^7 a^3$

IX. — $= \frac{10.9.8.7.6.5.4.3}{2.3.4.5.6.7.8} b^8 a^2 = 45 b^8 a^2$

X. — $= \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6.7.8.9} b^9 a = 10 b^9 a$

XI. — $= \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6.7.8.9.10} b^{10} = b^{10}$.

Итакъ $(a+b)^{10} = a^{10} + 10ba^9 + 45b^2 a^8 + 120b^3 a^7 + 210b^4 a^6 + 252b^5 a^5 + 210b^6 a^4 + 120b^7 a^3$ $45b^8 a^2 + 10b^9 a + b^{10}$.

Изъ сего примѣра видно, что когда показатель степени есть четное число, и слѣдовательно число членовъ степени нечетное число, то коеффиціентъ члена равноотстоящаго отъ крайнихъ есть самое большее число, а коеффиціенты членовъ равно отстоящихъ отъ онаго равны.

277. Составить изъ $a+b$ девятую степень?

Говорю I. Членъ $= a^9$

II. — $= 9ba^8$

III. — $= \frac{9.8}{2} b^2 a^7 = 36b^2 a^7$

IV. — $= \frac{36.7}{3} b^3 a^6 = 84b^3 a^6$

V. — $= \frac{84.6}{4} b^4 a^5 = 126b^4 a^5$

VI. — $= \frac{126.5}{5} b^5 a^4 = 126b^5 a^4$

VII. — $= \frac{126.4}{6} b^6 a^3 = 84b^6 a^3$

VIII. — $= \frac{84.3}{7} b^7 a^2 = 36b^7 a^2$

IX. — $= \frac{36.2}{8} b^8 a = 9b^8 a$

X. — $= \frac{9.1}{9} b^9 = b^9$

Слѣдовательно

$$(a+b)^9 = a^9 + 9ba^8 + 36b^2 a^7 + 84b^3 a^6 + 126b^4 a^5 + 126b^5 a^4 + 84b^6 a^3 + 36b^7 a^2 + 9b^8 a + b^9.$$

Отсюда видно, что когда показатель степени нечетное число, и слѣдовательно число членовъ степени четное; то коеффиціенты среднихъ членовъ равны, такъ какъ и прочихъ членовъ равно отъ нихъ отстоящихъ.

278. Ежели возводимое въ степень n двучленное количество будетъ не $x+a$, но $x-a$, то члены въ которыя изъ $-a$ входятъ въ составленіе нечетные степени, будутъ отрицательные; то есть

$$(x-a)^n = x^n - nax^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2} a^2 x^{n-2} - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^3 x^{n-3} \ldots\ldots + a^n$$

Здѣсь послѣдній членъ a^n бедетъ $-a^n$, когда n есть число нечетное.

279. И такъ вообще, полагая n четное число, будетъ

$$(x \pm a)^n = x^n \pm \frac{n}{1} ax^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2} a^2 x^{n-2} \pm \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^3 x^{n-3} + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.} a^4 x^{n-4} \ldots\ldots\ldots + a^n$$

Вотъ общая формула для возведенія въ степени количествъ; она, когда показатель нечетное число, перемѣнится въ слѣдующую:

$$(x \pm a)^{n+1} = x^{n+1} \pm \frac{(n+1)}{1} ax^n + \frac{(n+1)n}{1.2} a^2 x^{n-1} \pm \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} a^3 x^{n-2} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} a^4 x^{n-3} \ldots\ldots \pm a^{n+1}.$$

280. Помощїю сысканной формулы для возведенїя $x \pm a$ въ n степень, можно возвесть во всякую степень какое бы количество дано небыло. На примѣръ, чтобъ возвесть въ четвертую степень $x+a+b$ дѣлаю $a+b=c$, и сперва возвожу $x+c$ въ четвертую степень, а потомъ вмѣсто степеней изъ c вставляю степени изъ $a+b$. Такимъ образомъ будетъ:

$$\begin{aligned}(x+a+b)^4 = (x+c)^4 &= x^4 + 4cx^3 + 6c^2x^2 + 4c^3x + c^4 \\ &= x^4 + 4(a+b)x^3 + 6(a+b)^2x^2 \\ &\quad + 4(a+b)^3x + (a+b)^4 = \\ &= x^4 + 4ax^3 + 4bx^3 + 6a^2x^3 \\ &\quad + 12abx^2 + 6b^2x^2 + 4a^3x \\ &\quad + 12a^2bx + 12ab^2x + 4b^3x \\ &\quad + a^4 + 4ba^3 + 6b^2a^2 + 4b^3a \\ &\quad + b^4.\end{aligned}$$

281. Когда члены a и b имѣютъ коеффицїенты, тогда ихъ должно возвесть въ соотвѣтственныя степени; такимъ образомъ:

$$\begin{aligned}(2a+3b)^4 &= 2^4a^4 + 4.\,2^3.\,3ba^3 + 6.\,2^2.\,3^2b^2a^2 \\ &\quad + 4.\,2.\,3^3b^3a + 3^4b^4 \\ &= 16a^4 + 96ba^3 + 216b^2a^2 + 216b^3a \\ &\quad + 81b^4.\end{aligned}$$

282. Вообще, чтобъ удобнѣе возвесть, на примѣръ: $4a^2 + 2b^3$ въ 8ю степень, пологаю $4a^2 = d$, $2b = e$, и вмѣсто $4a^2 + 2b^3$ сперва возвожу въ 8ю степень $d+e$, а потомъ въ результатѣ вмѣсто d и e вставляю ихъ величины; то есть:

$$\begin{aligned}(4a^2+2b^3)^8 = (d+e)^8 &= d^8 + 8ed^7 + 28e^2d^6 + 56e^3d^5 \\ &\quad + 70e^4d^4 + 56e^5d^3 + 28e^6d^2 + 8e^7d + e^8 =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(4a^2)^8 + 8.\,2b^3(4a^2)^7 + 28(2b^3)^2(4a^2)^6 + 56(2b^3)^3 \\ &\quad (4a^2)^5 + 70(2b^3)^4(4a^2)^4 + 56(2b^3)^5(4a^2)^3 \\ &\quad + 28(2b^3)^6(4a^2)^2 + 8(2b^3)^7\,4a^2 + (2b^3)^8 =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&65536a^{16} + 98304b^3a^{14} + 229376b^6a^{12} + 499648b^9a^{10} \\ &\quad + 286720b^{12}a^8 + 114688b^{15}a^6 + 28672b^{18}a^4 \\ &\quad + 512b^{21}a^2 + 256b^{24}.\end{aligned}$$

283. По причинѣ, что $a^m x^{n-m} = x^n \frac{a^m}{x^m}$, можно вмѣсто формулы

$$(x \pm a)^n = x^n \pm \frac{n}{1} ax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 x^{n-2} \pm \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^3 x^{n-3} \ldots\ldots + a^n$$

употреблять сїю:

$$(x \pm a)^n = x^n \left(1 \pm \frac{n}{1}.\frac{a}{x} + \frac{n}{1}.\frac{(n-1)}{2}.\frac{a^2}{x^2} + \frac{n}{2}.\frac{(n-1)}{2}.\frac{(n-2)}{3}.\frac{a^3}{x^3} \ldots\ldots + \frac{a^n}{x^n}\right).$$

284. Въ общей формулѣ $(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1} a^2 x^{n-2} +$ и проч., пологая $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$ и проч. будемъ имѣть:

$(x+a)^1 = x+a$;

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$;

$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$;

$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$;

$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$;

$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6$;

$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$;

$(x+a)^8 = x^8 + 8ax^7 + 28a^2x^6 + 56a^3x^5 + 70a^4x^4 + 56a^5x^3 + 28a^6x^2 + 8a^7x + a^8$;

$(x+a)^9 = x^9 + 9ax^8 + 36a^2x^7 + 84a^3x^6 + 126a^4x^5 + 126a^5x^8 + 84a^6x^3 + 36a^7x^2 + 9a^8x + a^9$;

$(x+a)^{10} = x^{10} + 10ax^9 + 45a^2x^8 + 120a^3x^7 + 210a^4x^6 + 252a^5x^5 + 210a^6x^4 + 120a^7x^3 + 45a^8x^2 + 10a^9x + a^{10}$.

285. Помощїю сихъ формулъ, смотря только на коеффицїенты членовъ ихъ, можно извлекать корни всякихъ степеней, какъ изъ алгебраическихъ выраженїй, такъ и изъ чиселъ.

Поелику правила для извлеченїя сихъ корней всякой удобно вывести можетъ, подражая тому, что сказано было о извлеченїи квадратныхъ и кубическихъ корней, то мы здѣсь, не описывая самыхъ правилъ, приложимъ только нѣсколько примѣровъ, кои всякой легко можетъ понять.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt[4]{625 - 2000x + 2400x^2 - 1280x^3 + 256x^4} & 5-4x \text{ искомой корень.} \\
-625 & \\
\hline
\quad -2000x + 2400x^2 - 1280x^3 + 256x^4 & 500 = 5^3 \times 4 \\
-626 + 2000x - 2400x^2 + 1280x^3 - 256x^4 & = -(5-4x)^4. \\
\hline
\quad \text{″} \quad \text{″} \quad \text{″} \quad \text{″} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt[6]{729 - 2916x^2 + 4860x^4 - 4320x^6 + 2160x^8 - 576x^{10} + 64x^{12}} & 3-2x^2 \text{ искомой корень.} \\
-729 & \\
\hline
\quad -2916x^2 + 4860x^4 - 4320x^6 + 2160x^8 - 576x^{10} + 64x^{12} & 1458 = 3^5 \times 6 \\
-729 + 2916x^2 - 4860x^4 + 4320x^6 - 2160x^8 + 576x^{10} - 64x^{12} & = -(3-2x^2)^6. \\
\hline
\quad \text{″} \quad \text{″} \quad \text{″} \quad \text{″} \quad \text{″} \quad \text{″} &
\end{array}
$$

286. И вообще, чтобъ извлечь $n^{\text{ой}}$ степени корень, надлежитъ поступить слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[n]{a+b} & a^{\frac{1}{n}} + \dfrac{b}{na^{\frac{n-1}{n}}} + \text{и проч. искомой корень.} \\ -a & \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \cdot n = na^{\frac{n-1}{n}} \\ \hline +b & \end{array}$$

$$-a - b - \frac{n-1}{n} \cdot a^{\frac{b^2}{\frac{n-1}{n}}} + \text{и проч.} = -\left(a^{\frac{1}{n}} + na^{\frac{b}{\frac{n-1}{n}}}\right)^n$$

$$-\frac{n-1}{n} \cdot a^{\frac{b}{\frac{n-1}{n}}} + \text{и проч.}$$

и такъ далѣе

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\sqrt[n]{a+b} \text{ или } (a+b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \cdot ba^{\frac{-n+1}{n}} + \text{и проч.}$$

$$= a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} ba^{\frac{1}{n}-1} + \text{и проч.}$$

И слѣдовательно

$$\sqrt[n]{(a+b)^m} \text{ или } (a+b)^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} ba^{\frac{1}{n}-1} + \text{и проч.}\right)^m =$$

$$a^{\frac{1}{n} \cdot m} + mba^{\frac{1}{n}(m-1)} \cdot \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} + \text{и проч.} =$$

$$a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} ba^{\frac{m}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - 1} + \text{и проч; то есть:}$$

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \cdot ba^{\frac{m}{n}-1} + \text{и проч.}$$

Изъ чего можемъ заключить, что показатель p какое бы ни было положительное, цѣлое или дробное, число всегда будетъ

$$(a+b)^p = a^p + \frac{p}{1} ba^{p-1} + \frac{p \cdot (p-1)}{1 \cdot 2} b^2 a^{p-2} + \text{и проч.}$$

287. Но можно доказать, что когда p есть число отрицательное, то такъ же будетъ

$$(a+b)^{-p} = a^{-p} + (-p)ba^{-p-1} + \frac{(-p)(-p-1)}{1 \cdot 2} b^2 a^{-p-2} + \text{и проч.}$$

Въ самомъ дѣлѣ $(a+b)^{-p} = \frac{1}{(a+b)^p} =$

$\frac{1}{a^p + pba^{p-1} + \text{и проч}}$; но дѣля по обыкновенному способу 1 на $a^p + pba^{p-1} +$ и проч., получимъ $a^{-p} - pba^{-p-1} +$ и проч.; или $a^{-p} + (-p)\, ba^{-p-1}$ + и проч.

И такъ, какое бы число показатель p небылъ, всегда будетъ

$$(a+b)^p = a^p + pba^{p-1} + \frac{p \cdot (p-1)}{1 \cdot 2} b^2 a^{p-2} + \text{и проч.}$$

ГЛАВА XVII.

Объ уравненіяхъ второй степени.

288. Уравненіе второй степени называется полнымъ, когда въ членахъ его находится неизвѣстное второй и первой степени. Полное уравненіе второй степени можетъ быть изображено общимъ видомъ: $Ax^2 + Bx = F$ или $Ax^2 + Bx - F = 0$, гдѣ Ax^2 есть сумма членовъ содержащихъ x^2, Bx сумма членовъ заключающихъ x, F сумма постоянныхъ количествъ. Раздѣливши члены сего уравненія на A, будетъ $x^2 + \frac{B}{A} x - \frac{F}{A} = 0$; предположивши, что $\frac{B}{A} = p$, $\frac{F}{A} = q$, получимъ $x^2 + px - q = 0$.

Уравненіе второй степени, незаключающее въ членахъ своихъ неизвѣстнаго первой степени, имѣетъ видъ $Ax^2 = C$ или $Ax^2 - C = 0$; здѣсь Ax^2 есть сумма членовъ заключающихъ x^2, C сумма постоянныхъ количествъ. Если члены сего уравненія раздѣлимъ на A, то получимъ $x^2 - \frac{C}{A} = 0$, или, сдѣлавши $\frac{C}{A} = q$, будетъ $x^2 - q = 0$.

Уравненіе второй степени, неимѣющее постоянныхъ членовъ, имѣетъ видъ $Ax^2 + Bx = 0$, или $x^2 + \frac{B}{A}x = 0$, или $x^2 + px = 0$, гдѣ $p = \frac{B}{A}$.

И такъ уравненіе второй степени можетъ имѣть одинъ изъ слѣдующихъ трехъ видовъ:

$$x^2 - q = 0\text{, или } x^2 = q;$$
$$x^2 + px = 0;$$
$$x^2 + px - q = 0\text{, или } x^2 + px = q.$$

289. Рѣшить уравненіе второй степени значитъ найти такую величину неизвѣстнаго количества x, которая бы, будучи вмѣсто его вставлена, удовлетворяла условію уравненія, то есть сумму членовъ его дѣлала бы равною нулю; таковая величина неизвѣстнаго x называется *корнемъ уравненія*.

290. *Рѣшить уравненіе* $x^2 = q$?

Извлекши изъ обѣихъ частей сего уравненія квадратной корень, получимъ $x = \pm\sqrt{q}$, то есть $x = +\sqrt{q}$, и $x = -\sqrt{q}$. И такъ неизвѣстное x будетъ имѣть двѣ совершенно равныя величины, но только съ противными знаками.

291. *Рѣшить уравненіе* $x^2 + px = 0$?

Уравненіе сіе можетъ быть изображено $x(x+p)=0$. Оно пораздѣленіи членовъ на x, даетъ $x + p = 0$, и $x = -p$; раздѣливъ же члены на $x+p$, будетъ $x=0$. И такъ $x=0$, и $x = -p$.

292. *Рѣшить уравненіе* $\frac{2x^2}{3} + \frac{11}{4} = \frac{41}{12}$?

Уничтоживъ знаменателей сего уравненія, получимъ:

$$8x^2 + 33 = 41;$$
$$\text{или } 8x^2 = 41 - 33 = 8;$$
$$x^2 = \tfrac{8}{8};$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1;$$

то есть $x = 1$, и $x = -1$.

293. Разсмотримъ уравненіе $x^2 + px + q = 0$.

Если бы неизвѣстнаго x корень былъ a, то вставивши величину сію въ уравненіе, мы получили

$$a^2 + pa + q = 0;$$

Откуда $q = -a^2 - pa$.

И такъ $x^2 + px + q = 0$ превратится въ

$$x^2 - a^2 + px - pa = 0,$$

или $(x+a)(x-a) + p(x-a) = 0$,

или $(x-a)(x+a+p) = 0$.

И такъ 1е. всякое полное уравненіе второй степени состоитъ изъ двухъ факторовъ.

2e. Каждой факторъ даетъ особливой корень, изъ коихъ одинъ есть $x = + a$, другой же $x = - a - p$.

3e. Ежели факторы равны, то и оба корня уравненія равны; самое же уравненіе есть квадратъ одного изъ факторовъ.

4e. Сумма корней $+ a$ и $- a - p$ есть $- p$, а произведеніе ихъ $- a^2 - ap = q$; то есть: сумма корней, взятая съ противнымъ знакомъ, равна коеффиціенту втораго члена; а произведеніе равно извѣстному количеству q.

5e. Зная одинъ изъ корней, на примѣръ a, найдется другой $-a-p$, раздѣливши уравненіе на $x-a$.

294. Рѣшить уравненіе $x^2 + px + q = 0$?

Если бы первая часть сего уравненія была совершенной квадратъ, тогда бы надлежало только извлечь изъ нее квадратной корень, и мы имѣли бы уравненіе первой степени, представляющее фактора, и тотчасъ дающее величину корня. Въ такомъ случаѣ надлежало бы быть $q = \frac{1}{4} p^2$.

Но если q не равно $\frac{1}{4} p^2$, и слѣдовательно $x^2 + px + q$ не есть квадратъ двучленнаго количества, то тогда придавши къ обѣимъ частямъ уравненія $\frac{1}{4} p^2 - q$, первая часть сдѣлается совершеннымъ квадратомъ, и мы получимъ

$$x^2 + px + q + \tfrac{1}{4} p^2 - q = \tfrac{1}{4} p^2 - q;$$

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4} p^2 = \tfrac{1}{4} p^2 - q.$$

Извлекши изъ обѣихъ частей квадратной корень будетъ

$$x + \tfrac{1}{2} p = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} p^2 - q}.$$

Слѣдовательно $x = - \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{1}{4} p^2 - q}$.

то есть $x = - \frac{1}{2} p + \sqrt{\frac{1}{4} p^2 - q}$, и $x = - \frac{1}{2} p - \sqrt{\frac{1}{4} p^2 - q}$.

295. Разсмотримъ различные виды корней, относительно знаковъ и величины количествъ p и q.

Сей часъ изъ уравненія $x^2 + px + q = 0$ мы получили $x = - \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{1}{4} p^2 - q}$.

Но когда 1e. $x^2 - px + q = 0$; то, подобно предыдущему поступая, получимъ $x = \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{1}{4} p^2 - q}$.

2e. Если $x^2 - px - q = 0$, то $x = \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{1}{4} p^2 + q}$.

3e. Если $x^2 + px - q = 0$, то $x = - \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{1}{4} p^2 + q}$.

Разсматривая уравненіе $x^2 + px + q = 0$

относительно величинъ p и q надлежитъ замѣтить три случая, или $\frac{1}{4} p^2 = q$, или $\frac{1}{4} p^2 > q$, или наконецъ $\frac{1}{4} p^2 < q$.

Въ первомъ случаѣ будетъ $x = - \frac{1}{2} p$, и $(x + \frac{1}{2} p)^2 = 0$.

**

Вовторомъ будетъ $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, и по причинѣ, что $\frac{1}{2}p > \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, оба корня будутъ отрицательные.

Въ третьемъ случаѣ произойдетъ

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-1\,(q - \frac{1}{4}p^2)}:$$

оба корня будутъ мнимые, и вопросъ, коего свойство изображаетъ уравненіе $x^2 + px + q = 0$, рѣшенъ быть не можетъ.

И такъ заключимъ вообще:

Уравненіе $x^2 + px + q = 0$, имѣетъ два отрицательныхъ дѣйствительныхъ корня, когда $q < \frac{1}{4}p^2$; но если $q > \frac{1}{4}p^2$, то оба корня мнимые.

Уравненіе $x^2 - px + q = 0$ имѣетъ два корня положительныхъ если $q < \frac{1}{4}p^2$, и два мнимыхъ если $q > \frac{1}{4}p^2$.

Уравненіе $x^2 - px - q = 0$ имѣетъ оба корня дѣйствительныя, одинъ положительной, и одинъ отрицательной.

Уравненіе $x^2 + px - q = 0$ также имѣетъ оба корня дѣйствительные, одинъ положительной, и одинъ отрицательной.

296. Рѣшеніе, сдѣланное нами общему уравненію второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ $x^2 + px + q = 0$, или $x^2 + px = -q$, даетъ намъ правило для рѣшенія уравненій второй степени. Для сего должно: 1е. уничтожить знаменателей, что дѣлается приведеніемъ членовъ къ одинакому знаменателю; 2е. если коеффиціентъ члена заключающаго вторую степень неизвѣстнаго отрицательной, то сдѣлать положительнымъ: что дѣлается чрезъ перемѣну знаковъ всѣхъ членовъ; 3е. постоянныя количества перенесть во вторую часть а неизвѣстныя въ первую; 4е. квадратъ неизвѣстнаго количества освободить отъ коеффиціента, раздѣливъ на него всѣ члены уравненія; 5е взять квадратъ изъ половины коеффиціента первой степени неизвѣстнаго количества, и придать его къ обѣимъ частямъ уравненія; 6е. извлечь изъ обѣихъ частей квадратной корень; наконецъ 7е постоянное количество перенесть во вторую часть: такимъ образомъ получится величина неизвѣстнаго количества.

Мы здѣсь для поясненія правила предложимъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ I.

297. Рѣшить уравненіе $9x^2 - 12x + 4 = 0^2$.

Говорю $9x^2 - 12x = -4$;

по раздѣленіи всѣхъ членовъ на 9 будетъ

$$x^2 - \frac{12}{9}x = -\frac{4}{9},$$

$$\text{или } x^2 - \frac{4}{3}x = -\frac{4}{9};$$

Взявши квадратъ изъ половины коеффиціента x, то есть изъ $\frac{2}{3}$, и придавши его къ обѣимъ частямъ получимъ

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{4}{9} - \frac{4}{9},$$

или $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 0$.

Извлекши квадратной корень, будетъ

$$x - \frac{2}{3} = 0.$$

Слѣдовательно $x = \frac{2}{3}$.

Примѣръ II.

298. Рѣшить уравненіе $9x^2 - 12x + 3 = 0$?

Перенеся постоянное число 3 вовторую часть будемъ имѣть

$$9x^2 - 12x = -3;$$

раздѣливши всѣ члены на 9 будетъ

$$x^2 - \frac{4}{3}x = -\frac{3}{9};$$

взявши изъ половины $\frac{4}{3}$ квадратъ и придавши къ обѣимъ частямъ, получимъ

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{4}{9} - \frac{3}{9},$$

или $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$;

извлекши изъ обѣихъ частей квадратной корень получимъ

$$x - \frac{2}{3} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{9}},$$

или $x - \frac{2}{3} = \pm\frac{1}{3}$.

Слѣдовательно $x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$;

то есть $x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$,

и $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Примѣръ III.

299. Рѣшить уравненіе

$$x^2 - x - 2 = 0?$$

Говорю $x^2 - x = 2$;

взявши изъ половины коеффиціента x, то есть изъ $\frac{1}{2}$ квадратъ, и придавши его къ обѣимъ частямъ получимъ

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4},$$

или $x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$;

извлекши изъ обѣихъ частей квадратной корень, будетъ

$$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}.$$

Слѣдовательно $x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$;

то есть $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$,

и $x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.

Примѣръ IV.

300. Рѣшить уравненіе

$$3x^2 - 4x + 19 = 5x^2 - 11x + 25?$$

По перенесеніи извѣстныхъ количествъ во вторую часть, а перемѣнныхъ въ первую, будетъ

$$3x^2 - 5x^2 + 11x - 4x = 25 - 19,$$

или $-2x^2 + 7x = 6$;

перемѣнивъ знаки у всѣхъ членовъ, получимъ

$$2x^2 - 7x = -6;$$

раздѣливши всѣ члены на 2, будетъ

$$x^2 - \tfrac{7}{2}x = -3.$$

Слѣдовательно $x^2 - \tfrac{7}{2}x + (\tfrac{7}{4})^2 = (\tfrac{7}{4})^2 - 3$,

откуда $x - \tfrac{7}{4} = \pm\sqrt{\tfrac{49}{16} - 3} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{16}} = \pm\tfrac{1}{4}$.

И такъ $x = \tfrac{7}{4} \pm \tfrac{1}{4}$;

то есть $x = \tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{4} = 2$,

и $x = \tfrac{7}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{2}$.

Примѣръ V.

301. Рѣшить уравненіе

$$\frac{2x^2}{3} - \frac{5x}{4} + \frac{5}{6} = \frac{11x^2}{12} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}?$$

Уничтоживъ здѣсь знаменателей, чрезъ приведеніе къ знаменателю 12 членовъ сего уравненія, получимъ

$$8x^2 - 9x + 10 = 11x^2 - 6x + 4;$$

откуда $8x^2 - 11x^2 - 9x + 6x = 4 - 10$;

или $-3x^2 - 3x = -6$,

$$3x^2 + 3x = 6,$$

$$x^2 + x = 2,$$

$$x^2 + x + (\tfrac{1}{2})^2 = 2 + (\tfrac{1}{2})^2,$$

$$x^2 + x + (\tfrac{1}{2})^2 = 2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4},$$

$$x + \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{9}{4}} = \pm\tfrac{3}{2};$$

$$x = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}.$$

И такъ $x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = 2$,

и $x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2} = -1$.

Примѣръ VI.

302. Рѣшить уравненіе

$$9x^2 - 12x = -8?$$

Говорю $x^2 - \tfrac{12}{9}x = -\tfrac{8}{9}$,

$$x^2 - \tfrac{4}{3}x = -\tfrac{8}{9},$$

$$x^2 - \tfrac{4}{3}x + (\tfrac{2}{3})^2 = (\tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{8}{9},$$

$$x^2 - \tfrac{4}{3}x + (\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{4}{9} - \tfrac{8}{9} = -\tfrac{4}{9},$$

$$x - \tfrac{2}{3} = \pm\sqrt{-\tfrac{4}{9}},$$

$$x - \tfrac{2}{3} = \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{-1}.$$

И такъ $x = \tfrac{2}{3} \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{-1}$;

обѣ величины x мнимыя.

Примѣръ VII.

303. Рѣшить уравненіе $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, относительно y?

Переношу члены, незаключающіе y, во вторую часть и получаю

$$Ay^2 + Bxy + Dy = -Cx^2 - Ex - F,$$

или $Ay^2 + (Bx + D)y = -Cx^2 - Ex - F$;

откуда $y^2 + (\frac{Bx + D}{A})y = -\frac{Cx^2 - Ex - F}{A}$;

$$y^2 + (\frac{Bx + D}{A})y + (\frac{Bx + D}{2A})^2 = (\frac{Bx + D}{2A})^2 - \frac{Cx^2 + Ex + F}{A};$$

$$y^2 + (\frac{Bx + D}{A})y + (\frac{Bx + D}{2A})^2 = \frac{B^2x^2 + 2BDx + D^2}{4A^2} - \frac{Cx^2 + Ex + F}{A};$$

по приведеніи второй части къ знаменателю $4A^2$ будетъ

$$y^2 + (\frac{Bx + D}{A})y + (\frac{Bx + D}{2A})^2 = \frac{B\,x^2 + 2BDx + D^2 - 4ACx^2 - 4AEx - 4AF}{4A^2},$$

Извлекши изъ обѣихъ частей квадратной корень, получимъ

$$y + \frac{Bx+D}{2A} = \pm \frac{\sqrt{[B^2x^2+2BDx+D^2-4ACx^2-4AEx-4AF]}}{2A},$$

или

$$y + \frac{Bx+D}{2A} = \pm \frac{\sqrt{[(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF]}}{2A}.$$

И такъ

$$y = \frac{-Bx-D \pm \sqrt{[(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF]}}{2A}.$$

ГЛАВА XVIII.

Объ употребленіи уравненій второй степени при рѣшеніи вопросовъ.

Вопросъ I.

304. Найти число, котораго квадратъ сложенной со 132, равнялся бы сему самому числу 23 раза взятому?

Назвавши x искомое число, условіе вопроса изобразится уравненіемъ

$$x^2 + 132 = 23x.$$

Чтобъ опредѣлить величину x, то рѣшаю уравненіе сіе: оно даетъ

$$x^2 - 23x = -132,$$
$$x^2 - 23x + (\tfrac{23}{2})^2 = (\tfrac{23}{2})^2 - 132,$$
$$x^2 - 23x + (\tfrac{23}{2})^2 = \tfrac{1}{4};$$
$$x - \tfrac{23}{2} = \pm \tfrac{1}{2}.$$

И такъ $x = \frac{23}{2} \pm \frac{1}{2}$,

то есть $x = \frac{23}{2} + \frac{1}{2} = 12$,

и $x = \frac{23}{2} - \frac{1}{2} = 11$.

И такъ для x двѣ величины, одна 12, а другая 11: каждая изъ нихъ, удовлетворнетъ вопросу; ибо вставя въ уравненіе вмѣсто x число 12 получимъ

$$x^2 + 132 = 144 + 132 = 276 = 23.\ 12.$$

Вставивъ же число 11, будетъ

$$x^2 + 132 = 121 + 132 = 253 = 23.\ 11.$$

Вопросъ II.

305. Найти число, котораго бы квадратъ безъ 2 равнялся 1?

Назвавши x искомое число, условіе вопроса изобразится уравненіемъ

$$x^2 - 1 = 2;$$

Слѣдовательно $x^2 = 3$.

$$x = \pm\sqrt{3} = \pm\ 1{,}7320508....$$

И такъ вопросу удовлетворять будетъ величина $x = 1{,}7320508$.

Вопросъ III.

306. Раздѣлить количество a на двѣ такія части, чтобъ помножа m разъ взятую первую на n разъ взятую вторую, въ произведеніи было бы количество p?

Назвавши x первую часть, вторая будетъ a—x; слѣдовательно условіе вопроса изобразится

$$mx.\ n\,(a-x) = p.$$

И такъ $amnx - mnx^2 = p$,

$$mnx^2 - amnx = -p,$$

$$x^2 - ax = -\tfrac{p}{mn},$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{p}{mn},$$

$$x - \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{p}{mn}}.$$

Слѣдовательно $x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{p}{mn}}$.

Если положимъ что $a=10$, $m=4$, $n=5$, $p=420$, то будетъ $x = \tfrac{10}{2} \pm \sqrt{\tfrac{100}{4} - \tfrac{420}{20}}$;

или $x = 5 \pm \sqrt{4}$;

то есть $x = 7$, и $x = 3$.

Обѣ величины сіи удовлетворяютъ вопросу, и если $x=7$, то $a-x=3$; когда же $x=3$, то $a-x=7$.

Вопросъ IV.

307. Нѣсколько человѣкъ должны были заплатить 800 рублей. Когда трое отказались отъ платежа, то каждой изъ остальныхъ заплатилъ 60 рублями больше нежели, когда бы всѣ платили. Спрашивается число платившихъ людей?

Назвавши x искомое число людей, будетъ $\frac{800}{x}$ часть каждаго платившаго, $\frac{800}{x+3}$ часть каждаго человѣка, если бы сумма была плачена всѣми.

И такъ свойство вопроса изобразится уравненіемъ

$$\frac{800}{x+3} + 60 = \frac{800}{x};$$

откуда вывожу: $800x + 60x^2 + 180x = 800x + 2400$,

или $60x^2 + 180x = +2400$,

$$x^2 + 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} + 40 = \tfrac{169}{4},$$

$$x + \tfrac{3}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{169}{4}} = \pm\tfrac{13}{2}.$$

И такъ $x = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{13}{2}$.

Слѣдовательно вопросу удовлетворяетъ величина $x = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{13}{2} = 5$.

Вопросъ V.

308. Три артели вмѣстѣ сдѣлали работу въ 15 часовъ. Но ежели бы работала изъ нихъ первая одна артель, то сдѣлала бы оную работу въ $\frac{4}{5}$ времени какое употребила бы вторая; а вторая бы 15 часами прежде третьей. Спрашивается время употребленное каждою артелью на сдѣланіе работы?

Назвавши x время второй, $\frac{4x}{5}$ будетъ время первой, а $x+15$ время третьей. Изобразивши работу 1ю, то первая артель въ часъ сдѣлаетъ $\frac{1}{\frac{4x}{5}}$, или $\frac{5}{4x}$, вторая $\frac{1}{x}$, а третія $\frac{1}{x+15}$; въ 15 же часовъ первая сработаетъ $\frac{75}{4x}$, вторая $\frac{15}{x}$, а третія $\frac{15}{x+15}$. И такъ будетъ

$$\frac{75}{4x} + \frac{15}{x} + \frac{15}{x+15} = 1;$$

откуда вывожу

$$75x^2 + 1125x + 60x^2 + 900x + 60x^2 = 4x^3 + 60x^2,$$

или раздѣливши его на x

$$75x + 1125 + 60x + 900 + 60x = 4x^2 + 60x,$$

$$-4x^2 + 75x + 60x - 60x + 60x = -2025$$

$$-4x^2 + 135x = -2025$$

$$4x^2 - 135x = 2025$$

$$x^2 - \frac{135x}{4} + \left(\frac{135}{8}\right)^2 = \left(\frac{135}{8}\right)^2 + \frac{2025}{4}$$

$$x - \frac{135}{8} = \pm \frac{225}{8}.$$

Слѣдовательно $x = \frac{135}{8} \pm \frac{225}{8}$,

то есть $x = 45$

и $x = -\frac{45}{4}$.

Изъ сихъ величинъ только $x=45$ способна для рѣшенія вопроса. И такъ будетъ время второй артели $x=45$ часамъ, первой $\frac{4x}{5} = 36$ часамъ, а третьей $x+15 = 60$ часамъ.

Вопросъ VI.

309. Найти два числа, коихъ сумма a, а сумма кубовъ ихъ b?

Назвавши одно число x, а другое y, условіе вопроса изобразится двумя уравненіями:

$$x + y = a,$$

$$x^3 + y^3 = b.$$

Изъ перваго уравненія вывожу

$$y = a - x;$$

вставляю величину сію во второе, и получаю

$$x^3 + (a-x)^3 = b,$$

$$x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = b,$$

$$3ax^2 - 3a^2x = b - a^3,$$

$$x^2 - ax = \frac{b-a^3}{3a},$$

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b-a^3}{3a},$$

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^3+4b-4a^3}{12a},$$

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{4b-a^3}{12a};$$

$$x - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}};$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}.$$

Слѣдовательно вставя величину сію въ уравненіе $y = a - x$, получимъ

$$y = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}.$$

Вопросъ VII.

310. Найти два числа, коихъ сумма, произведеніе и разность квадратовъ были бы равны?

Назвавши одно искомое число x, а другое y, условіе вопроса изобразится слѣдующими двумя уравненіями

$$x + y = xy,$$

$$x^2 - y^2 = x + y.$$

Разрѣшаю сперва второе уравненіе; оно даетъ

$$x^2 + x = y^2 + y,$$
$$x^2 + x + \tfrac{1}{4} = y^2 + y + \tfrac{1}{4},$$
$$x + \tfrac{1}{2} = y + \tfrac{1}{2}.$$

Слѣдовательно $x = y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = y + 1$.

Вставивъ сію величину x въ первое уравненіе, получу

$$y + 1 + y = y\,(y+1),$$
$$2y + 1 = y^2 + y,$$
$$y + 1 = y^2,$$
$$y^2 - y = 1,$$
$$y^2 - y + \tfrac{1}{4} = 1 + \tfrac{1}{4};$$
$$y - \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{5}{4}}.$$

И такъ $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$.

Слѣдовательно $x = y + 1 = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$.

Принявши $\sqrt{\frac{5}{4}}$ только съ знакомъ $+$, будетъ

$$y = 1.61,\quad x = 2.61.$$

Чтобъ увѣриться въ истиннѣ нашихъ величинъ вставимъ ихъ въ уравненія изображающія вопросъ.

$$x = \tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

Слѣдов. I^e. $x + y = 2 + 2\sqrt{\frac{5}{4}} = 4.22$.

$$y = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}} + \tfrac{5}{4}$$

Слѣдовательно $y^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{2}\sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{5}{4}$

$$= \tfrac{6}{4} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}.$$

$$x = \tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$x = \tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$\tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$+ \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}} + \tfrac{5}{4}$$

Слѣдовательно $x^2 = \frac{14}{4} + 3\sqrt{\frac{5}{4}}$

$$x = \tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$+ \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{4}{4}} + \tfrac{5}{4}$$

Слѣдов. II^e. $xy = \frac{3}{4} + 2\sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{5}{4}$

$$= 2 + 2\sqrt{\tfrac{5}{4}} = 4.22.$$

$$x^2 = \tfrac{14}{4} + 3\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y^2 = \tfrac{6}{4} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

Слѣд. III. $x^2 - y^2 = 2 + 2\sqrt{\frac{5}{4}} = 4.22$.

И такъ $x + y = xy = x^2 - y^2 = 4.22$.

ГЛАВА XIX.

О составленіи уравненій.

311. Всякое уравненіе по перенесеніи всѣхъ членовъ въ одну часть будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + tx + u = o.$$

Коеффиціенты p, q .... t извѣстны и притомъ могутъ быть положительные, отрицательные и равные нулю; въ послѣднемъ случаѣ членъ имѣющій коеффиціентомъ нуль совсѣмъ находиться не будетъ.

Представимъ уравненіе сіе чрезъ X=o.

Корнемъ уравненія сего называется всякая величина a, которая будучи вставлена въ уравненіе вмѣсто x дѣлаетъ X=o, или

$$a^m - pa^{m-1} + qa^{m-2} + \ldots ta + u = o.$$

312. Уравненіе

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots tx + u = o.$$

Можно представить изъ m произведенія факторовъ двучленныхъ количествъ $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-t)$; ибо произведеніе сихъ факторовъ будетъ имѣть слѣдующій видъ одинаковой съ уравненіемъ

$$\begin{array}{llll} x^m - ax^{m-1} & + abx^{m-2} & - abcx^{m-3} + \ldots & + abc\ldots t \\ \quad - bx^{m-1} & + acx^{m-2} & - \ldots\ldots & \\ \quad - cx^{m-1} & + bcx^{m-2} & - \ldots\ldots & \\ \quad \ldots\ldots & & & \\ \quad \ldots\ldots & & & \\ \quad - tx^{m-2} & + atx^{m-2} & - abtx^{m-3} & \end{array}$$

Чтобъ сіе произведеніе равнялось уравненію, то должно быть во первыхъ оно равно нулю, и слѣдовательно $x-a=o$, $x-b=o$, $x-c=o\ldots\ldots x-t=o$; во вторыхъ $a+b+c+\ldots\ldots+t=p$; $ab+ac+\ldots\ldots+at=q$; ...; $abc\ldots t=u$.

И такъ 1е. *Всякое уравненіе можно почитать за произведеніе столькихъ двучленныхъ факторовъ, имѣющихъ общимъ членомъ букву неизвѣстнаго, сколько находится единицъ въ самомъ большомъ показателѣ неизвѣстнаго.*

2е. *Вторые члены сихъ двучленныхъ факторовъ, будучи взяты съ противными знаками, суть корни уравненія.*

3е. *Столько корней имѣетъ уравненіе, сколько единицъ въ самомъ большемъ показателѣ неизвѣстнаго количества.*

4е. *Сумма всѣхъ корней взятая съ противнымъ знакомъ равняется коеффиціенту втораго члена.*

5е. *Коеффиціентъ третьяго члена равенъ суммѣ произведеній корней умноженныхъ по два.*

6e. Коеффиціентъ четвертаго члена равенъ, взятой съ противнымъ знакомъ суммѣ произведеній корней, умноженныхъ по три; и такъ далѣе до послѣдняго члена, которой равенъ произведенію всѣхъ корней.

7e. Если послѣдній членъ равенъ нулю, то одинъ изъ корней равенъ нулю.

8e. Если въ уравненіи ненаходится втораго члена, то значитъ, что оно имѣетъ какъ положительные такъ и отрицательные корни, и что сумма однѣхъ равна суммѣ другихъ.

313. По причинѣ, что уравненіе можно принимать составленнымъ изъ произведенія многихъ двучленныхъ факторовъ, то его также можно принимать за произведеніе многочленныхъ факторовъ.

На примѣръ уравненіе третьей степени можно почитать составленнымъ изъ произведенія фактора второй степени на фактора первой степени. Уравненіе четвертой степени можно почитать за произведеніе двухъ факторовъ второй степени; или одного третьей степени, а другаго первой. И такъ далѣе.

314. Такъ какъ уравненіе второй степени можетъ имѣть умственные или мнимые корни, то и высшія уравненія могутъ ихъ также имѣть.

315. Если въ уравненіи перемѣнятся знаки членовъ, представляющихъ нечетныя степени, то положительные корни его превратятся въ

отрицательные, а отрицательные въ положительные.

Ибо для перемѣны знаковъ корней въ уравненіи, стоитъ только поставить $-x$ вмѣсто $+x$; но такая вставка неможетъ перемѣнить знаковъ въ членахъ, заключающихъ четныя степени количества x, а только перемѣняетъ ихъ въ тѣхъ, которые содержатъ нечетныя степени.

316. *Для превращенія уравненія съ знаменателями въ такое, въ которомъ бы ни знаменателей, ни коеффиціента у перваго члена ненаходилось, надлѣжитъ поставить вмѣсто неизвѣстнаго другое неизвѣстное, раздѣленное на призведеніе всѣхъ знаменателей, и умножить потомъ новое уравненіе не знаменателя перваго члена.*

На примѣръ, если дано будетъ такое уравненіе $x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{cx}{n} + \frac{d}{p} = o$; то дѣлаю $x = \frac{y}{mnp}$. Вставивъ величину сію x въ данномъ уравненіи, получаю $\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{cy}{mn^2p} + \frac{d}{p} = o$; умножаю члены на $m^3n^3p^3$ и нахожу $y^3 + \frac{am^3n^3p^3}{m^3n^2p^2} y^2 + \frac{m^3n^3p^3c}{mn^2p} y + \frac{m^3n^3p^3d}{p} = o$, или $y^3 + anpy^2 + m^2np^2cy + m^3n^3p^2d = o$.

317. Если m, n и p будутъ равны между собою, то довольно въ такомъ случаѣ сдѣлать $x = \frac{y}{m}$. Отсюда слѣдуетъ, что для превращенія уравненія, въ которомъ всѣ коеффеціенты будутъ цѣлыя числа, и притомъ первой членъ

его также будетъ съ коеффиціентомъ, въ другое, котораго бы первой членъ не имѣлъ коеффиціента, а прочіе бы члены имѣли коеффиціентовъ цѣлыхъ, надлежитъ сдѣлать $x = \frac{y}{m}$: m въ семъ случаѣ представляетъ коеффиціента перваго члена.

На примѣръ пусть будетъ данное уравненіе $mx^3 + ax^2 + bx + c = o$. Раздѣливъ его на m будетъ $x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{m} + \frac{c}{m} = o$. Сдѣлавши $x = \frac{y}{m}$ и вставивши сію величину въ уравненіе, произойдетъ $\frac{y^3}{m^3} + \frac{ay^2}{m^3} + \frac{by}{m^2} + \frac{c}{m} = o$. Помноживши на m^3, будетъ $y^3 + ay^2 + bmy + cm^2 = o$.

ГЛАВА XX.

О двухчленныхъ и трехчленныхъ уравненіяхъ.

318. *Уравненіями двухчленными* называются тѣ, въ членахъ которыхъ неизвѣстное находится въ одинакой степени, и всегда могутъ быть приведены въ два члена.

На примѣръ уравненіе $ax^m + bx^m = ac^n - d$ есть двухчленное. Оно можетъ быть изображено $(a+b)\,x^m = ac^n - d$; и слѣдовательно $px^m = q$, гдѣ $p = a + b$, $q = ac^n - d$.

Уравненія двухчленныя рѣшатся очень легко. Ибо $px^m = q$ даетъ $x^m = \frac{q}{p}$, и слѣдовательно $x = \sqrt[m]{\frac{q}{p}}$. Когда m четное число, то $x = \pm\sqrt[m]{\frac{q}{p}}$;

если же m нечетное, то $\sqrt[m]{\frac{q}{p}}$, получаетъ знакъ количества $\frac{q}{p}$. Если $\frac{q}{p}$ есть количество отрицательное, а m четное число, то обѣ величины x суть мнимыя.

319. Уравненія имѣющія видъ $Ax^{2n} + Bx^n + C = o$ называются *трехчленными*, и рѣшатся какъ уравненія второй степени.

Уравненіе $Ax^{2n} + Bx^n + C$ можетъ быть обращено въ $x^{2n} + px^n + q = o$; что произойдетъ раздѣливши всѣ члены на A, и сдѣлавши $\frac{B}{A} = p$, $\frac{C}{A} = q$.

320. Рѣшить уравненіе

$$x^{2n} + px^n + q = o\ ?$$

Уравненіе сіе даетъ

$$x^{2n} + px^n = -q,$$

$$x^{2n} + px^n + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q,$$

$$x^n + \tfrac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q};$$

Слѣдовательно $x^n = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

$$\text{И такъ } x = \sqrt[n]{-\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}}.$$

Вопросъ.

321. *Найти два числа, коихъ произведеніе 10, а сумма кубовъ* 133?

Назвавши одно изъ искомыхъ чиселъ x, а другое y, условія вопроса изобразятся двумя уравненіями

$$xy = 10,\ \text{и}\ x^3 + y^3 = 133.$$

Первое уравненіе даетъ $x = \frac{10}{y}$. Слѣдовательно вставивши сію величину x во второе, получу

$$\frac{10^3}{y^3} + y^3 = 133,$$

$$\text{или } 1000 + y^6 = 133y^3,$$

$$y^6 - 133y^3 = -1000.$$

$$y^6 - 133y^3 + (\tfrac{133}{2})^2 = (\tfrac{133}{2})^2 - 1000,$$

$$y^3 - \tfrac{133}{2} = \pm\sqrt{(\tfrac{133}{2})^2 - 1000},$$

$$y^3 = \tfrac{133}{2} \pm\sqrt{(\tfrac{133}{2})^2 - 1000}.$$

Слѣдовательно $y = \sqrt[3]{\frac{133}{2} \pm \sqrt{(\frac{133}{2})^2 - 1000}},$

$$y = \sqrt[3]{\tfrac{133}{2} \pm \tfrac{117}{2}}:$$

то есть $y = \sqrt[3]{125} = 5,$

и $y = \sqrt[3]{8} = 2.$

И такъ если $y = 5$, то $x = \frac{10}{y} = 2$; а если $y = 2$, то $x = \frac{10}{y} = 5$.

Въ самомъ дѣлѣ $xy = 5.\ 2 = 2.\ 5 = 10.$

$$x^2 + y^2 = 5^2 + 2^2 = 2^2 + 5^2 = 133.$$

ГЛАВА XXI.

О рѣшеніи уравненій помощію соизмѣримыхъ дѣлителей.

322. Мы видѣли, что послѣдній членъ всякаго уравненія состоитъ изъ произведенія корней уравненія. И такъ *чтобъ найти цѣлые положительные и отрицательные корни*, надлѣ*жить сперва найти дѣлителей* (1) *послѣдняго члена, потомъ вставлять ихъ въ уравненіе вмѣсто x съ знакомъ + и —; тотъ дѣлитель которой уравненіе превратитъ въ нуль, будетъ корень онаго уравненія.* Въ семъ состоитъ способъ рѣшенія уравненій помощію *соизмѣримыхъ дѣлителей.*

323. Положимъ, что требуется сыскать соизмѣримыхъ дѣлителей въ уравненіи $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Пусть будетъ дѣлитель сего уравненія $x + a$; въ такомъ случаѣ его можно

---

(1) Чтобъ найти всѣхъ дѣлителей какого нибудь числа, должно прежде дѣлить его на первыя числа, начиная съ простѣйшихъ, и продолжать дѣлить на одно число, пока можно. Потомъ написавъ въ особой строкѣ всѣ сіи первыя числа и каждое столько разъ сколько оно могло раздѣлить, умножь ихъ между собою по два, по три, по четыре, и проч. Произведенія сіи, первыя числа и 1 будутъ искомые дѣлители.

На примѣръ, *желая сыскать* всѣхъ дѣлителей для 60, дѣлю 60 на 2, въ частномъ выходитъ 30, дѣлю 30 на 2, въ частномъ получаю 15; дѣлю 15 на 3, нахожу 5, на послѣдокъ дѣлю 5 на 5, и получаю 1. Такимъ образомъ первыми дѣлителями будутъ 2, 2, 3, 5; умножаю ихъ попарно, и нахожу 4, 6, 10, 6, 10, 15.

Умножаю ихъ между собою по три, и нахожу 12, 20, 30, 30. Наконецъ умножаю по четыре, и получаю 60.

И такъ всѣ дѣлители даннаго числа будутъ:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

принять за произведеніе факторовъ $x + a$ и $x^3 + kx^2 + mx + n$, то есть

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + an \\ \quad + ax^3 + akx^2 + amx \end{array}\right\} = o.$$

Изъ сего послѣдняго уравненія, которое должно представлять тоже, что $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = o$, происходятъ слѣдующія другія: $k + a = p$, $m + ak = q$, $n + am = r$, $an = s$; или $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r-n}{a}$, $k = \frac{q-m}{a}$, $1 = \frac{p-k}{a}$.

Допустимъ теперь, что число b представляетъ одного изъ дѣлителей послѣдняго члена; а чтобъ увѣриться, что можно принять его, то по замѣчанію предыдущихъ уравненій $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r-n}{a}$, и проч. должно дѣлить послѣдній членъ даннаго уравненія на сего дѣлителя, частное вычесть изъ коеффиціента x, и остатокъ раздѣлить опять на того же дѣлителя; вычесть сіе второе частное изъ коеффиціента x^2, и остатокъ раздѣлить на того же дѣлителя; такое дѣйствіе продолжать до коеффиціента втораго члена уравненія, по раздѣленіи котораго въ частномъ должна выйти 1. Если взятой дѣлитель вездѣ дѣлитъ на равно, то безъ сомнѣнія можно принять его за a; въ противномъ же случаѣ взятое число негодится.

Примѣръ I.

324. *Найти соизмѣримыхъ дѣлителей уравненія* $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 + o$?

Вставляя здѣсь $+1$ и -1 вижу что она не дѣлаетъ уравненіе равнымъ нулю. И такъ ищу, кромѣ 1, всѣхъ дѣлителей послѣдняго члена 15. Нашедши ихъ пишу въ первой строкѣ съ знакомъ $+$ и $-$.

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = o.$$

Дѣлители 15..	+15,	+ 5,	+ 3,	− 3,	− 5,	− 15
	+ 1,	+ 3,	+ 5,	− 5,	− 3,	− 1
	− 21,	− 23,	− 25,	− 15,	− 17,	− 19
				+ 5		
				+ 18		
				− 6		
				− 3		
				+ 1		

Дѣлю послѣдній членъ $+ 15$ на каждое число первой строки и частныя ставлю во второй.

Вычитаю каждой членъ второй строки изъ коеффиціента x, то есть изъ 20, и остатки пишу въ третьей строкѣ.

Дѣлю каждой членъ сей строки на соотвѣтствующій ему въ первой строкѣ и нашедши цѣлое частное, пишу его. Здѣсь кромѣ одного $+5$, другаго нѣтъ; но одно ли цѣлое частное происходитъ, или много, продолжаю такимъ образомъ:

Вычитаю каждое частное изъ коеффиціента 23 члена x^2, и пишу остатки въ пятой строкѣ; здѣсь нахожу $+ 18$.

Дѣлю; какъ прежде каждой остатокъ на соотвѣтствующій членъ первой строки, и пишу каждое частное внизу; здѣсь пишу — 6.

Вычитаю каждое новое частное изъ коэффиціента — 9 члена x^3, и пишу остатки внизу; здѣсь пишу — 3.

Наконецъ дѣлю остатки сіи на соотвѣтствующіе члены *первой* строки; здѣсь нахожу въ частномъ + 1. И такъ заключаю, что — 3 соотвѣтствуетъ члену a, и слѣдовательно x—3 представляетъ дѣлителя x+a, то есть x—3 дѣлитъ данное наше уравненіе. И такъ x=3.

Примѣръ II.

325. *Рѣшить уравненіе*

$$x^4 - x^3 - 16x^2 + 55x - 75 = 0\,?$$

Пишу $x^4 - x^3 - 16x^2 + 55x - 75 = 0.$

Дѣлители

75... 3, 5, 25, 15, 75, — 3, — 5, —15, —25, —75.
—25, —15, — 3, — 5, — 1, +25, +15, + 5, + 3, + 1.
+30, +40, +52, +50, +54, +80, +70, +60, +58, +56.
10, + 8 —14; — 4
— 6, — 8 —30, —20
— 2 + 6
— 3 + 5
— 1 — 1.

И такъ 3 и — 5 суть цѣлые корни уравненія. Если раздѣлимъ данное уравненіе на $(x-3)(x+5) = x^2 + 2x - 15$,

то получимъ $x^2 - 3x + 5 = 0$: разрѣшивши сіе уравненіе по предложеннымъ правиламъ для уравненій второй степени, получимъ $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-11})$.

И такъ данное уравненіе имѣетъ четыре корня, два дѣйствительныхъ x=3 и x=—5, и два мнимыхъ $x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{-11})$, и $x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{-11})$.

Примѣръ III.

326. *Рѣшить уравненіе*

$$x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0\,?$$

Пишу $x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0$

Дѣлители 10... 2, 5, — 2, — 5
5, 2, — 5, — 2
—3, —6, — 13, — 10
+ 2
+ 5.

И такъ цѣлой корень уравненія x=—5; раздѣливши данное уравненіе на x+5, получу уравненіе $x^2 - 2x + 2 = 0$, которое даетъ $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

И такъ данное уравненіе имѣетъ три корня, одинъ дѣйствительный x=—5, а два мнимыхъ $x = 1 + \sqrt{-1}$, и $x = 1 - \sqrt{-1}$.

Примѣръ IV.

327. *Рѣшить уравненіе* $x^3 - 17x - 4 = 0$?

Пишу $x^3 - 17x - 4 = 0$.

Дѣлители 4... $2, \quad 4, -2, -4$

$-2, -1, \quad 2, \quad 1$

$-19, -18, -15, -16$

$+4$.

И такъ $x = -4$.

Раздѣливши данное уравненіе на $x + 4$, получу $x^2 - 4x - 1 = 0$: отсюда вывожу $x = 2 \pm \sqrt{5}$.

И такъ данное уравненіе имѣетъ три корня, одинъ цѣлой или соизмѣримой $x = -4$, а два другихъ приближенныхъ или несоизмѣримыхъ $x = 2 + \sqrt{5}$, и $x = 2 - \sqrt{5}$.

ГЛАВА XXII.

О несоизмѣримыхъ корняхъ уравненій.

328. Когда уравненіе не имѣетъ соизмѣримыхъ корней, тогда несоизмѣримые корни получаются чрезъ приближеніе.

Положимъ что мы нашли $x > m$ и $x < n$; разность же между m и n есть 1. Говорю, вмѣсто x въ уравненіе можно вставить $m + p$; p будучи дробь меньше единицы; слѣдовательно p^2, p^3, p^4. и проч. будутъ еще гораздо меньше единицы; и такъ въ исчисленіи ихъ можно выкинуть. Вставя въ уравненіе $m + p$, опредѣлится чрезъ то величина p. Теперь, чтобъ получить величину x еще ближѣ къ настоящей, увеличимъ величину $m + p = m'$ дробью p'. Вставя $m' + p'$ въ уравненіе, получимъ p'. Продолжая такимъ образомъ получимъ довольно близкую величину къ настоящей x.

329. Для поясненія способа сего, сыщемъ помощію его корень уравненія $x^2 = 20$.

Очевидно, что здѣсь $x > 4$, и $x < 5$; слѣдовательно $x = 4 + p$. И такъ $x^2 = (4 + p)^2 = 16 + 8p + p^2 = 20$. Но такъ какъ p^2 есть дробь чрезвычайно малая, то, откинувши ее, получаю $16 + 8p = 20$. Слѣдовательно $p = \frac{1}{2}$, и $x = \frac{9}{2}$. Теперь положивъ, что $x = \frac{9}{2} + p'$, будетъ $x^2 = \frac{81}{4} + 9p' + p'^2 = 20$; или $\frac{81}{4} + 9p' = 20$; откуда вывожу $p' = -\frac{1}{36}$. И такъ $x = \frac{161}{36}$. Положивъ еще, что $x = \frac{131}{36} + p''$, получимъ $x^2 = (\frac{161}{36} + p'') = \frac{25921}{1296} + \frac{161p''}{18} = 20$; слѣдовательно $p'' = -\frac{1}{11592}$. И такъ $x = \frac{51847}{11592} = 4.4721359 5$.

Въ самомъ дѣлѣ изъ уравненія $x^2 = 20$ слѣдуетъ, что $x = \sqrt{20}$. Извлекши же $\sqrt{20}$ получимъ что $x = 4.47213595$.

330. Подобнымъ образомъ находятся приближенные корни кубовъ, биквадратовъ, и проч. степеней.

Пусть будетъ $x^3 = a$, гдѣ $x > n$, и $< n + 1$.

Полагаю $x = n + p$. Слѣдовательно $x^3 = n^3 + 3n^2p + 3np^2 + p^3 = a$, или $n^3 + 3n^2p = a$, что даетъ $p = \frac{a-n^3}{3n^2}$. Посему $x = n + \frac{a-n^3}{3n^2} = \frac{2n^3+a}{3n^2}$. И такъ если n есть величина близкая къ $\sqrt[3]{a}$, то $\frac{2n^3+a}{3n^2}$ будетъ еще ближѣ подходить. Но чтобъ болѣе ближѣ къ настоящей получить величину, то должно величину $\frac{2n^3+a}{3n^2}$ принять за n и увеличить снова дробью p. И такъ далѣе.

На примѣръ если $x^3 = 2$. Замѣчаю, что здѣсь $a=2$, $n=1$. Слѣдовательно $x^3 = \frac{2n^3+a}{3n^2} = \frac{4}{3}$. Принявши теперь $\frac{4}{3}$ за n, будетъ $x = \frac{2n^3+a}{3n^2} = \frac{91}{72}$. Принявши же $\frac{91}{72}$ за n, получаю $x = \frac{1126819}{894348}$.

331. Сей же самый способъ служитъ къ опредѣленію корней многочленныхъ уравненій.

Пусть будетъ $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$, и $x > n-1$, но $< n$. Положимъ, что $x = n - p$, гдѣ по причинѣ, что дробь p меньше единицы, всѣ степени ея будутъ еще меньше и слѣдовательно въ исчисленіи могутъ быть выкинуты.

$$\text{И такъ будетъ } x^3 = n^3 - 3n^2p;$$
$$x^2 = n^2 - 2np.$$

Слѣдовательно данное уравненіе превратится въ $n^3 - 3n^2p + an^2 - 2anp + bn - bp + c = 0$; или $n^3 - (3n^2 + 2an + b)p + an^2 + bn + c = 0$.

Отсюда получаю $p = \frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b}$.

И такъ $x = n - p = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3n^2 + 2an + b}$,

или, положивши $2n^3 + an^2 - c = r$, $3n^2 + 2an + b = s$,

$$x = \frac{r}{s}.$$

Принявши $\frac{r}{s}$ за n и вставя вмѣсто его въ выраженіе x, получимъ новую величину x гораздо приближеннѣе къ настоящей. И такъ далѣе.

332. Найти приближенную величину x въ уравненіи

$$x^3 + 2x^2 + 2x - 50 = 0\ ?$$

Нахожу сначала, что $x < 3$. Слѣдовательно $x = 3 - p$.

И такъ $x^3 = 27 - 27p$,

$2x^2 = 18 - 12p$,

$2x = 6 - 2p$.

Посему $x^3 + 2x^2 + 2x - 50 = 51 - 41p - 50 = 0$,

или $1 - 41p = 0$.

то есть $p = \frac{1}{41}$.

Слѣдовательно $x = 3 - \frac{1}{41} = \frac{122}{41} = 2.9756$.

И такъ $x^3 = 26.3468$,

$2x^2 = 17.7086$,

$2x = 5.9512$.

Посему $x^3 + 2x^2 + 2x - 50 = 50.0066 - 50 = 0.0066$.

Если бы мы захотѣли имѣть еще ближе величину къ x подходящую, тогда бы намъ надлежало уже вставить въ уравненіе $2.9756 - p$ вмѣсто x; и такъ далѣе.

333. Найти приближенной корень уравненія

$$x^5 + 3x^3 + x - 1 = 0\ ?$$

Нашедши сначала что довольно близкая къ x величина есть $\frac{1}{2}$, вставляю въ уравненїе вмѣсто x количество $\frac{1}{2} + p$, и получаю

$$x^5 = \frac{1}{32} + \frac{5}{16} p,$$
$$3x^3 = \frac{3}{8} + \frac{9}{4} p,$$
$$x = \frac{1}{2} + p.$$

Слѣдовательно $x^5 + 3x^3 + x - 1 = \frac{29}{32} + \frac{57}{16} p - 1 = 0$.

Откуда получаю $p = \frac{1}{38}$,

$$x = \frac{10}{19} = 0.5263.$$

По сей причинѣ $x^5 = 0.0403$,

$$3x^3 = 0.4374.$$

Слѣдовательно $x^5 + 3x^3 + x - 1 = 0.004$.

ГЛАВА XXIII.

О рядахъ вообще, разложенїи количествъ въ ряды, и способѣ неопредѣленныхъ коэффицїентовъ.

334. *Рядомъ* называютъ собранїе членовъ возрастающихъ или умаляющихся по нѣкоторому закону.

335. *Рядомъ опредѣленнымъ* называютъ тотъ, котораго число членовъ опредѣленно; *безконечнымъ* же тотъ, котораго члены предполагаются простирающимися до безконечности.

336. Ряды, коихъ послѣдующїе члены меньше предыдущихъ, называются *сходящимися*; тѣже коихъ послѣдующїе члены больше предыдущихъ, *разходящимися*. Ряды тѣмъ скорѣе сходятся или разходятся, чѣмъ каждой членъ болѣе различествуетъ отъ предыдущаго.

337. Рядовъ есть безчисленное множество. Самые же главнѣйшїе и употребительнѣйшїе суть прогрессїи ариѳметическїя и геометрическїя, ряды чиселъ фигурныхъ, полигонныхъ и различныхъ степеней чиселъ, идущихъ въ ариѳметической прогрессїи, а особливо натуральныхъ чиселъ 1, 2, 3, 4 и проч.

338. *Прогрессїею ариѳметическою* называется рядъ равноразнствующихъ количествъ; такимъ образомъ рядъ чиселъ 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 и проч. составляетъ прогрессїю ариѳметическую; онъ изображается такъ $\div$ 3. 5. 7. 9. 11 и проч. Натуральныя числа составляютъ также ариѳметическую прогрессїю; т. е. $\div$ 1. 2. 3. 4. 5. 6 и проч., между членами коей разность есть 1, и которая называется *разностїю прогрессїи*. Въ прогрессїи же $\div$ 23. 21. 19. 17. 15. 13 и проч. разность есть 2.

339. Прогрессїя ариѳметическая бываетъ или *возрастающая* или *умаляющаяся*. Первою называется та, коей послѣдующїе члены возрастаютъ; а второю та, которой послѣдующїе члены умаляются. Такимъ образомъ прогрессїя $\div$ 0. 2. 4. 6. 8. 10. и проч. есть возрастающая;

прогрессія же ÷ 23. 21. 19. 17. 15. 13. 11 и проч. есть умаляющаяся.

340. Вообще ариѳметическая прогрессія можетъ изобразиться алгебрагически такъ:

$\div a .\ a \pm d .\ a \pm 2d .\ a \pm 3d .\ a \pm 4d .\ a \pm 5d .\ a \pm 6d .\ a \pm 7d .$ и проч.

341. *Прогрессіею геометрическою* называется рядъ равночастныхъ количествъ; частное двухъ сосѣдственныхъ членовъ называется *знаменателемъ содержанія* прогрессіи, поелику оно показываетъ во сколько разъ одинъ членъ больше другаго. Такимъ образомъ рядъ чиселъ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 и проч. есть прогрессія геометрическая, коей знаменатель содержанія есть 2; она изображается такъ $\div\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$ и проч. Въ прогрессіи $\div\div 160 : 40 : 10$ и проч. знаменатель содержанія есть 4.

342. Прогрессія геометрическая, такъ какъ и ариѳметическая, и по той же причинѣ, можетъ быть или *возрастающая* или *умаляющаяся.* Такимъ образомъ прогрессія $\div\div 1 : 3 : 9 : 27$ и проч. есть возрастающая; прогрессія же $\div\div 320 : 160 : 80 : 40 : 20$ и проч. есть умаляющаяся.

343. Всякая возрастающая геометрическая прогрессія вообще можетъ быть изображена алгебрагически такъ:

$\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 : aq^7 : aq^8 :$ и проч.

Умаляющаяся же такъ:

$\div\div a : \frac{a}{q} : \frac{a}{q^2} : \frac{a}{q^3} : \frac{a}{q^6} : \frac{a}{q^7} :$ и проч.

или $\div\div a : aq^{-1} : aq^{-2} : aq^{-3} : aq^{-4} : aq^{-5} : aq^{-6} :$ и проч.

344. *Ряды чиселъ фигурныхъ.*

Числа	*Постоянные* или перваго порядка.	1, 1, 1, 1, 1, 1, и проч.
	Натуральные или втораго порядка.	1, 2, 3, 4, 5, 6, и проч.
	Тріугольные или третьяго порядка.	1, 3, 6, 10, 15, 21, и проч.
	Пирамидальные или четвертаго пор.	1, 4, 10, 20, 35, 56, и проч.

Каждой членъ въ сихъ рядахъ равенъ соотвѣтствующему верхнему сложенному съ предшествующими его.

Числа сіи называются *фигурными* потому, что единицы третьяго и четвертаго рядовъ могутъ такъ быть разположены, что изобразятъ тріугольникъ и тріугольную пирамиду.

345. *Ряды чиселъ полигонныхъ.*

Ариѳметическія прогрессіи:

1, 2, 3, 4, 5, и проч. . . .	разность 1
1, 3, 5, 7, 9, и проч. . . .	разность 2
1, 4, 7, 10, 13, и проч. . . .	разность 3
1, 5, 9, 13, 17, и проч. . . .	разность 4

Полигонныя числа:

1, 3, 6, 10, 15, и проч.	*тріугольныя.*
1, 4, 9, 16, 25, и проч.	*квадратныя.*
1, 5, 12, 22, 35, и проч.	*пятіугольныя.*
1, 6, 15, 28, 45, и проч.	*шестіугольныя.*

Полигонныя числа составлены изъ постепенныхъ членовъ прогрессіи ариѳметической, коей первой членъ есть 1. Они называются *трїугольными*, *квадратными*, *пятїугольными* и проч. смотря по разности членовъ ариѳметической прогрессіи. Они называются *полигонными* потому, что единицы перваго, втораго, и проч. рядовъ могутъ быть такъ расположены, что изобразятъ трїугольникъ, квадратъ, пятїугольникъ, и проч.

346. Различные степени арифметической прогрессіи.

$\div a.\ a \pm d.\ a \pm 2d.\ a \pm 3d.\ a \pm 4d$ и проч. а особливо натуральныхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, 5, и проч. составляютъ также частные ряды.

347. Всякая дробь, а слѣдовательно и частное двухъ количествъ, также степень и корень количества, могутъ быть изображены какимъ нибудь рядомъ, коего члены будутъ соединены или знакомъ $+$ или $-$. Разложенїе въ рядъ дроби можетъ быть сдѣлано или посредствомъ дѣленїя или невтонова бинома, или наконецъ посредствомъ способа неопредѣленныхъ коеффицїентовъ.

348. Такимъ образомъ чтобъ разложить въ рядъ дробь $\frac{m}{n+x}$ должно раздѣлить m на $n+x$ или умножить m на $(n+x)^{-1}$; чрезъ сїе получимъ

$$\frac{m}{n+x} = \frac{m}{n} - \frac{mx}{n^2} + \frac{mx^2}{n^3} - \frac{mx^3}{n^4} + \frac{mx^4}{n^5} - \text{и проч.}$$

349. Сїе же самое мы получимъ по способу неопредѣленныхъ коеффицїентовъ. Вотъ въ чемъ состоитъ способъ сей:

Пусть будутъ A, B, C, D, E, и проч. такїя количества, что можетъ произойти слѣдующее уравненїе $\frac{m}{n+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$, и проч. Очевидно, что возможно сдѣлать такое предположенїе, потому что количество x возведено во всѣ степени, и количества A, B, C, D, и проч. могутъ принять всякую величину, дабы могло существовать уравненїе.

Чтобъ узнать величину каждаго изъ неопредѣленныхъ A, B, C, и проч., поступаю слѣдующимъ образомъ:

Множу второй членъ уравненїя на знаменателя $n+x$, и получаю

$$\begin{aligned} m = An &+ Bnx + Cnx^2 + Dnx^3 + Enx^4 + \text{ и проч.} \\ &+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ и проч.} \end{aligned}$$

Переведя m произойдетъ:

$$\begin{aligned} o = An &+ Bnx + Cnx^2 + Dnx^3 + Enx^4 + \text{ и проч.} \\ -m &+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ и проч.} \end{aligned}$$

Такъ какъ вторая часть уравненїя должна обратиться въ ничто, то очевидно что получится сей результатъ, если предположимъ, что неопредѣленныя величины такого свойства, что каждая колонна второй части превращается въ нуль. По сему предположенїю, получится столько уравненїй сколько неизвѣстныхъ, помощію коихъ и опредѣляшся неопредѣленныя A, B, C, и проч.

И такъ получимъ 1е $An-m=o$, 2е $Bnx+Ax=o$. 3е $Cnx^2+Bx^2=o$. 4е $Dnx^3+Cx^3=o$. 5е $Enx^4+Dx^4=o$. и проч.

Первое уравненіе даешъ $An=m$; откуда вывожу $A=\frac{m}{n}$. Вставляю величину сію во вторoе уравненіе и нахожу $B=-\frac{m}{n^2}$. Также вставляю величину B въ третіе уравненіе и получаю $C=\frac{m}{n^3}$, и такъ далѣе. Окончивши совсѣмъ сіе исчисленіе, получаю

$$\frac{m}{n+x}=\frac{m}{n}-\frac{mx}{n^2}+\frac{mx^2}{n^3}-\frac{mx^3}{n^4}+\frac{mx^4}{n^5}-\text{ и проч.}$$

Законъ ряда очевиденъ; и такъ легко продолжить исчисленіе, если потребуетъ того нужда.

350. Пусть еще предложено превращить въ рядъ количество $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}$. Положимъ $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$ и проч.

Помножа вторую часть на $a^2+2ax+x^2$, получу

$a^2=(a^2+2ax-x^2)(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ и проч.})$

И наконецъ

$$\begin{aligned} o=\ & a^2A+a^2Bx+a^2Cx^2+a^2Dx^3+a^2Ex^4+\text{ и проч.}\\ & -a^2+2aAx+2aBx^2+2aCx^3+2aDx^4+\text{ и проч.}\\ & -Ax^2-Bx^3-Cx^4-\text{ и проч.}\end{aligned}$$

Что даетъ $A=1$, $B=-\frac{2}{a}$, $C=\frac{5}{a^2}$, $D=-\frac{12}{a^3}$, и проч.

Наконецъ, вставя въ первое уравненіе величины A, B, C, и проч. получимъ

$$\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}=1-\frac{2x}{a}+\frac{5x^2}{a^2}-\frac{12x^3}{a^3}+\text{ и проч.}$$

351. Превратить $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$ въ рядъ?

Сначала пологаю $\frac{1+2x}{1-x-x^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ и проч.

Потомъ имѣю $1+2x=(1-x-x^2)(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ и проч.})$

И наконецъ $\frac{1+2x}{1-x-x^2}=1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+18x^5+$ и проч.

Рядъ сей легко продолжить, понеже каждой коеффиціентъ есть сумма двухъ предыдущихъ, и x постепенно возводится во всѣ степени.

352. Чтобъ превратить въ рядъ $\sqrt{a^2-x^2}$ или, иначе сказать, опредѣлить члены квадратнаго корня изъ a^2-x^2, дѣлаю

$$\sqrt{a^2-x^2}=A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+\text{ и проч.}$$

Потомъ возвожу обѣ части уравненія въ квадратъ, и получаю

$$\begin{aligned} a^2-x^2=\ & A^2+2ABx^2+B^2x^4+2ADx^6+\text{ и проч.}\\ & +2ACx^4+2BCx^6+\text{ и проч.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{или } o=\ & A^2+2ABx^2+B^2x^4+2ADx^6+\text{ и проч.}\\ & -a^2+x^2+2ACx^4+2BCx^6+\text{ и проч.}\end{aligned}$$

Что даетъ $A=a$, $B=-\frac{1}{2a}$, $C=-\frac{1}{8a^3}$, $D=-\frac{1}{16a^3}$, и проч.

Сдѣлавши подстановки, будетъ

$$\sqrt{a^2-x^2}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\text{ и проч.}$$

ГЛАВА XXIV.

О прогрессіи ариѳметической.

353. Разсматривая формулу $\div a.\ a\pm2d.\ a\pm3d.$ $a\pm4d.\ a\pm5d.$ и проч. видимъ, что 1е. *всякой членъ равенъ первому увеличенному или уменьшенному разностію содержанія, помноженною на число членовъ до него находящихся.* На примѣръ пятой членъ $a\pm4d$ равенъ первому a плюсъ или минусъ разность содержанія d, помноженная на число 4, показывающее сколько предъ $a\pm4d$ находится членовъ. Равномѣрно вообще $n^{ой}$ членъ $u = a \pm (n-1)d$.

354. 2е. *Разность всякой ариѳметической прогрессіи равна разности крайнихъ членовъ, раздѣленной на число членовъ безъ одного;* ибо разрѣша уравненіе $u = a \pm (n-1)d$, получимъ $d = \frac{u-a}{\pm(n-1)}$.

355. 3е. *Сумма всѣхъ членовъ арифметической прогрессіи равна полсуммѣ крайнихъ членовъ, помноженной на число членовъ,* то есть $s = \left(\frac{a+u}{2}\right) n$

Ибо сумма данной прогрессіи

$$\div a.\ a\pm d.\ a\pm2d.\ a\pm3d.\ a\pm4d \ldots a\pm(n-2)d.\ a\pm(n-1)d.$$

и перевороченной

$$\div a\pm(n-1)d.\ a\pm(n-2)d \ldots\ldots a\pm4d.\ a\pm3d.\ a\pm2d.\ a\pm d.\ a$$

будетъ

$$[2a\pm(n-1)d.] + [2a\pm(n-1)d] \ldots + [2a\pm(n-1)d.] + [2a\pm(n-1)d.] + [2a\pm(n-1)d.]$$

или $(a+u) + (a+u) \ldots + (a+u) + (a+u) + (a+u)$

Сумма же послѣдняго сего ряда есть

$$2s = (a+u).\ n$$

И слѣдовательно

$$s = \left(\frac{a+u}{2}\right).\ n$$

356. Двѣ формулы $u = a + (n-1)d$ и $s = \left(\frac{a+u}{2}\right).\ n$, относящіяся къ возрастающей прогрессіи, даютъ слѣдующія еще три

$$2s = 2un - dn(n-1),$$

$$2s = 2au + dn(n-1),$$

$$2ds = u^2 - a^2 + ad + ud,$$

357. Сіи пять уравненій между пятью количествами a, d, n, u и s, сравниваемыя между собою по четыре, служатъ къ опредѣленію величины каждаго изъ сихъ количествъ. Таковы суть слѣдующія двадцать формулъ, означенныя въ таблицѣ. Онѣ составляютъ рѣшеніе всеобщей задачи:

Даны три количества, составляющія ариѳметическую прогрессію, опредѣлить четвертое.

ТАБЛИЦА.

Извѣстныя:	Искомыя:	Формулы:
n—d—u		$a = u - d(n-1)$.
n—u—s	a	$a = \frac{2s - un}{u}$.
n—d—s		$a = \frac{2s - dn(n-1)}{2n}$.
u—d—s		$a = \frac{d \pm \sqrt{(2u+d)^2 - 8ds}}{2}$.
a—d—n		$u = a + d(n-1)$.
a—n—s	u	$u = \frac{2s - an}{n}$.
d—n—s		$u = \frac{2s + dn(n-1)}{2n}$.
a—d—s		$u = \frac{d \pm \sqrt{(2n-d)^2 + 8ds}}{2}$.
a—u—d		$n = 1 + \frac{n-a}{d}$.
a—u—s	n	$n = \frac{2s}{a+u}$.
a—d—s		$n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{(2a-d)^2 + 8ds}}{2d}$.
u—d—s		$n = \frac{2u + d \pm \sqrt{(2u+d)^2 - 8ds}}{2d}$.
a—u—n		$d = \frac{u-a}{n-1}$.
a—u—s	d	$d = \frac{u^2 - a^2}{2s - a - u}$.
a—n—s		$d = \frac{2s - 2an}{n(n-1)}$.
u—n—s		$d = \frac{2un - 2s}{n(n-1)}$.
a—u—n		$s = \frac{(a+u)n}{2}$.
a—u—d	s	$s = \frac{(a+u)(u-a+d)}{2d}$.
a—n—d		$s = \frac{2an + dn(n-1)}{2}$.
u—n—d		$s = \frac{2un - dn(n-1)}{2}$.

258. Принаровимъ сіи формулы къ задачамъ.

Задача 1. Найти пространство, какое перебѣжитъ тяжелое тѣло въ n мгновеній, безъ всякаго сопротивленія воздуха. Физики говорятъ, что раздѣливши время на равныя части, то пространства тѣломъ перебѣгаемыя составляютъ ариѳметическую прогрессію, которой первой членъ a есть *пространство въ секунду времени переходимое*, разность $d = 2a$, а число членовъ n.

Такимъ образомъ $s = \frac{2an + dn(n-1)}{2} = \frac{2an + 2an(n-1)}{2} = an^2$, то есть пространство перейденное тѣломъ сначала своего движенія равно пространству перейденному въ первую секунду, умноженному на квадратъ мгновеній.

359. Задача 2. Бомба употребила равныя времена на возхожденіе и опущеніе; движеніе же ее продолжалось 10 секундъ: спрашивается на какую высоту она поднялась?

Такъ какъ пространство въ секунду времени переходимое $a = 4.904$, и притомъ здѣсь $n = 5$, то $s = 4.904 \times 5^2 = 122.6$

360. Задача 3. Помѣстить среднія три ариѳметическія члена между 11 и 19, такъ чтобъ составилась ариѳметическая прогрессія.

Очевидно, что прогрессія сія должна состоять изъ 5ти членовъ; зная же первой и крайній члены можно найти содержаніе и опредѣлишь средніе члены. Содержаніе сіе $= \frac{19-11}{4} = \frac{8}{4} = 2$; искомыя же члены будутъ $11+2$, $11+4$, $11+6$; и такъ получимъ прогрессію ÷ 11. 13. 15. 17. 19.

ГЛАВА XXV.

О прогрессіи геометрической.

361. Разсматривая формулу ∺ $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 \ldots$ и проч. видимъ, что

1е. *Всякой членъ равенъ первому, помноженному на знаменателя содержанія, возведеннаго въ такую степень, сколько находится до него членовъ.* Такимъ образомъ пятой членъ aq^4 равенъ первому члену a помноженному на знаменателя содержанія q возведеннаго въ 4ю степень. Вообще nой членъ, то есть послѣдній, $u = aq^{n-1}$.

2е. *Содержаніе возрастающей геометрической прогрессіи равно корню степени, изображенной числомъ членовъ до послѣдняго, изъ частнаго происходящаго отъ раздѣленія послѣдняго члена на первой.* Ибо разрѣша уравненіе

$u = aq^{n-1}$, получимъ $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$.

3е. *Сумма членовъ равна разности, между произведеніемъ послѣдняго члена на знаменателя содержанія и первымъ, раздѣленной на разность между знаменателемъ содержанія и единицею.* Такимъ образомъ $s = \frac{uq-a}{q-1}$.

Ибо $s = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 \ldots\ldots aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1}$ или u.

$s - a = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 \ldots\ldots aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1} =$
$q\,(a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 \ldots\ aq^{n-4} + aq^{n-3} + aq^{n-2}) =$
$q\,(s-u) = sq - qu$.

И такъ $uq - a = sq - s = s\,(q-1)$.

Слѣдовательно $s = \frac{uq-a}{q-1}$.

362. Разсматривая также формулу

∺ $a : aq^{-1} : aq^{-2} : aq^{-3} \ldots\ aq^{-n+2} : aq^{-n+1}$ или u;

или ∺ $a : \frac{a}{q} : \frac{a}{q^2} : \frac{a}{q^3} : \frac{a}{q^4} : \frac{a}{q^5} \ldots\ \frac{a}{q^{n-2}} : \frac{a}{q^{n-1}}$, видно

1е. *Что всякой членъ равенъ первому, раздѣленному на знаменателя содержанія, возведеннаго въ такую степень, сколько находится до него членовъ.* Такимъ образомъ четвертой членъ aq^{-3} или $\frac{a}{q^3}$ равенъ первому члену a раздѣленному на знаменателя содержанія q возведеннаго въ третью степень. Вообще nой членъ, то есть $u = \frac{a}{q^{n-1}}$ или $= aq^{-n+1}$.

2е. $q = \sqrt[n-1]{\frac{a}{u}}$: сіе есть слѣдствіе предыдущаго уравненія.

3е. $s = \frac{qa-u}{q-1}$.

Ибо $s = a + \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \frac{a}{q^3} \ldots\ \frac{a}{q^{n-2}} + \frac{a}{q^{n-1}}$;

и $s - a = \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \frac{a}{q^3} \ldots\ldots + \frac{a}{q^{n-2}} + \frac{a}{q^{n-1}} =$
$\frac{1}{q}\left(a + \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} \ldots + \frac{a}{q^{n-3}} + \frac{a}{q^{n-2}}\right) = \frac{1}{q}\,(s-u)$

И такъ $s-a=\frac{s}{q}-\frac{u}{q}$, $qs-qa=s-u$, $qs-s=qa-u$, $s(q-1)=qa-u$;

Слѣдовательно $s=\frac{qa-u}{q-1}$.

Если прогрессіи геометрической умаляющейся послѣдній членъ $u=o$, то $s=\frac{qa}{q-1}$.

463. Изъ формулъ $u=aq^{n-1}$ и $s=\frac{uq-a}{q-1}$ происходятъ слѣдующія три:

$aq^n-a-sq+s=o$, $uq^n-u+sq^{n-1}-sq^n=o$, и $u.(s-u)^{n-1}-a.(s-a)^{n-1}=o$.

Помощію пяти сихъ уравненій между пятью количествами a, q, u, n и s, можно получить величину каждаго изъ оныхъ, когда даны три другія. Такимъ образомъ рѣшимъ всеобщую задачу: *даны три количества, составляющія геометрическую прогрессію, сыскать четвертое.* Вотъ результаты рѣшеній сихъ.

Извѣстныя:	Искомыя:	Формулы:
u—q—n	a	$a=\frac{u}{q^{n-1}}$.
u. q. s	a	$a=uq+s-qs$,
q. n. s	a	$a=\frac{s(q-1)}{q^n-1}$.
u. n. s	a	должно рѣшить уравненіе $u(s-u)^{n-1}-a.(s-u)^{n-1}=o$.

Извѣстныя:	Искомыя:	Формулы:
a. q. n	u	$u=aq^{n-1}$,
a. q. s	u	$u=\frac{sq-s+a}{q}$,
q. n. s	u	$u=\frac{sq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$,
a. n. s	u	должно рѣшить уравненіе $u(s-u)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=o$.
a. u. n	q	$q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$,
a. u. s	q	$q=\frac{s-a}{s-u}$,
a. n. s	q	$q=\sqrt[n]{\frac{a+sq-s}{a}}$
u. n. s	q	должно рѣшить уравненіе $(u+s)q^n-u-sq^{n-1}=o$.
a. u. q	n	должно рѣшить уравненіе $n=aq^{n-1}$,
a. u. s	n	$u(s-u)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=o$,
a. q. s	n	$aq^n-a-sq+s=o$,
u. q. s	n	$uq^n-u+sq^{n-1}-sq^n=o$.
a. u. q	s	$s=\frac{uq-a}{q-1}$,
a. u. n	s	$s=\frac{u\sqrt[n-1]{u}-a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u}-\sqrt[n-1]{a}}$;
a. n. q	s	$s=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$,
n. u. q	s	$s=\frac{u(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}$.

Формулы сіи могутъ быть принаровлены и къ умаляющимся прогрессіямъ; тогда должно принимать a за меньшой, или послѣдній членъ, а u за большой, или первой членъ.

364. *Задача.* Изобрѣтатель шахматной игры, получа позволенїе выбрать себѣ награжденїе по своему желанїю, попросилъ одно зерно для перваго квадратнаго мѣста шахматной доски, два для втораго, 4 для третьяго, 8 для четвертаго, и такъ далѣе, удвоевая всё до $64^{го}$ мѣста. Спрашивается сколько зеренъ онъ требовалъ?

Число сїе зеренъ есть, какъ очевидно, сумма членовъ геометрической возрастающей прогрессїи, коей $a=1$, $q=2$, $n=64$;

Слѣдовательно

$$s=\frac{a(q^n-1)}{q-1}=\frac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1=18446744073709551615.$$

Вычисленїе сїе состоитъ въ вычитанїи единицы изъ $64^{й}$ степени $2^{хъ}$. Оная степень можетъ быть составлена такимъ образомъ: умножь $1^е$ $4^{ю}$ степень $2^{хъ}$, или 16 само на себя; $2^е$ найденную $8^{ю}$ степень умножь самое на себя; $3^е$ такъ же $16^{ю}$ сїю степень самое на себя; наконецъ $4^е$ самую $32^{ю}$ степень самое на себя, отъ чего произойдетъ 64 степень $2_{хъ}$.

Любопытные люди нашли, что нужно 261000 зеренъ, дабы произошелъ мирїаграммъ; и такъ изобрѣтатель игры получилъ бы 970677180359070 мирїаграммовъ; а оцѣнивъ каждой марїаграммъ по 2 рубли, то ему надлѣжало бы дать 141354360718080 рублей, которая сумма превзошла бы всѣ богатства на свѣтѣ.

ГЛАВА XXVI.

О суммованїи рядовъ вообще.

365. Надъ рядами можно произвесть всѣ ариѳметическїя дѣйствїя, но самое изъ оныхъ полезнѣйшее есть *ихъ суммованїе*, то есть приведенїе всѣхъ членовъ даннаго ряда въ одно выраженїе.

Мы здѣсь предложимъ суммованїе только нѣкоторыхъ главныхъ рядовъ, помощїю коихъ можно суммовать протчїе.

366. *Найти сумму членовъ слѣдующей геометрической прогрессїи, умаляющейся до безконечности,*

$$\div\!\div\ \frac{d}{b}:\frac{d}{bq}:\frac{d}{bq^2}:\frac{d}{bq^3}:\frac{d}{bq^4}\ldots\ldots\frac{d}{bq^\infty};\ \text{въ коей } q>1.$$

Говорю

$$s=\frac{d}{b}+\frac{d}{bq}+\frac{d}{bq^2}+\frac{d}{bq^3}+\frac{d}{bq^4}\ldots\ldots+\frac{d}{bq^\infty},$$

$$s-\frac{d}{b}=\frac{d}{bq}+\frac{d}{bq^2}+\frac{d}{bq^3}+\frac{d}{bq^4}\ldots\ldots\frac{d}{bq^\infty}=$$

$$\frac{1}{q}\left(\frac{d}{b}+\frac{d}{bq}+\frac{d}{bq^2}+\frac{d}{bq^3}\ldots\ldots+\frac{d}{bq^{\infty-1}}\right)=$$

$$\frac{1}{q}\left(s-\frac{d}{bq^\infty}\right)=\frac{s}{q}-\frac{d}{bq^{\infty+1}};$$

$$s-\frac{s}{q}=\frac{d}{b}-\frac{d}{bq^{\infty+1}},$$

$$\frac{sq-s}{q}=\frac{d}{b}-\frac{d}{bq^{\infty+1}},$$

$$sq-s=\frac{dq}{b}-\frac{d}{bq^\infty},$$

$$s=\frac{\frac{dq}{b}-\frac{d}{bq^\infty}}{q-1};$$

Но $\frac{d}{bq^\infty}=0$;

Слѣдовательно

$$s=\frac{\frac{dq}{b}}{q-1}=\frac{dq}{bq-b}.$$

**

367. Примѣры. 1^{e}. Изобразить десятичную дробь 0,333 и проч. простирающуюся до безконечности, обыкновенною?

Она равна $= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots\ldots + \frac{3}{10^{\infty}}$, суммѣ членовъ прогрессіи ∺ $\frac{3}{10} : \frac{3}{100} : \frac{3}{1000} \ldots\ldots \frac{3}{10^{\infty}}$. Въ семъ случаѣ $d=3$, $b=10$, $q=10$; вставивъ величины сіи въ формулу $s = \frac{dq}{bq-b}$, получимъ $\frac{30}{100-10} = \frac{1}{3}$. И такъ 0,333 и проч. $= \frac{1}{3}$.

2^{e}. Найти величину дроби 0,999999 и проч.? замѣчаю, что она $= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} \ldots + \frac{9}{10^{\infty}}$, суммѣ членовъ прогрессіи ∺ $\frac{9}{10} : \frac{9}{100} : \frac{9}{1000} \ldots \frac{9}{10^{\infty}}$, коей сумма $= \frac{90}{100-10} = 1$; слѣдовательно 0.999999 и проч. $= 1$.

3^{e}. Превратить періодическую дробь 0, 142857 142857 142857 и проч. въ обыкновенную?

Замѣчаю что здѣсь $142857 = d$, $1000000 = b$, $1000000 = q$. И такъ $s = \frac{142857000000}{1000000000000-1000000} = \frac{1}{7}$. Слѣдовательно дробь 0,142857 142857 и проч. $= \frac{1}{7}$.

368. *Найти сумму ряда*,

$$\frac{a}{b},\ \frac{a+d}{bq},\ \frac{a+2d}{bq^2},\ \frac{a+3d}{bq^3}, \text{ и проч.}$$

Изображаю его такъ

$$\frac{a}{b},\ \frac{a}{bq} + \frac{d}{bq},\ \frac{a}{bq^2} + \frac{d}{bq^2} + \frac{d}{bq^2},\ \frac{a}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3}, \text{ и проч.}$$

Отсюда происходятъ слѣдующія геометрическія прогрессіи:

∺ $\frac{a}{b} : \frac{a}{bq} : \frac{a}{bq^2} : \frac{a}{bq^3} :$ и проч.; сумма ея есть $\frac{aq}{bq-b}$,

∺ $\frac{d}{bq} : \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq^3} :$ и проч.; сумма ея есть $\frac{d}{bq-b}$,

∺ $\frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq^3} :$ и проч.; сумма ея есть $\frac{d}{bq^2-bq}$,

∺ $\frac{d}{bq^3} :$ и проч.; сумма ея есть $\frac{d}{bq^3-bq^2}$.

Но сіи суммы, исключая первой, составляютъ прогрессію ∺ $\frac{d}{bq-b} : \frac{d}{bq^2-bq} : \frac{d}{bq^3-bq^2} :$ и проч. коей сумма, будучи сложена въ мѣстѣ съ первою суммою $\frac{aq}{bq-b}$, то будетъ $\frac{aqq-aq+dq}{bq^2-2bq+b} = s$, равно суммѣ даннаго ряда: такова есть общая формулла для всякаго ряда, коего числители находятся въ прогрессіи ариѳметической, а знаменатели въ прогрессіи геометрической.

369. Найти *суммy членовъ ариѳметической возрастающей прогрессіи.* ÷ a. b. c. . . . . t. u, *возведенныхъ въ* $n^{ю}$ *степень?*

Положимъ разность сей прогрессіи d, число членовъ m, s_n представляетъ сумму членовъ возведенныхъ въ $n^{ю}$ степень, s_{n-1} сумму членовъ возведенныхъ въ $n-1$, и такъ далѣе; то будетъ $b = a + d$, $c = b + d \ldots\ldots u = t + d$;

$$b^n = (a+d)^n = a^n + n.\ a^{n-1}\ d + \frac{n.\ (n-1)}{2}\ a^{n-2}\ d^2 + \frac{n\ (n-1)\ (n-2)}{2.\ 3}\ a^{n-3}\ d^3 + \text{и проч.}$$

$$c^n = (b+d)^n = b^n + n.\ b^{n-1}\ d + \frac{n.\ (n-1)}{2}.\ b^{n-2}\ d^2 + \frac{n.\ (n-1)(n-2)}{2.\ 3}\ b^{n-3}\ d^3 + \text{и проч.}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$u^n = (t+d)^n = t^n + n.\ t^{n-1}\ d + \frac{n.\ (n-1)}{2}\ t^{n-2}\ d^2 + \frac{n.\ (n-1)(n-2)}{2.\ 3}\ t^{n-3}\ d^3 + \text{и проч.}$$

Сложивъ, получимъ

$$s_n - a^n = s_n - u^n + n.\ d.\ (s_{n-1} - u^{n-1}) + \frac{n\ (n-1)}{2}\ d^2\ (s_{n-2} - u^{n-2}) + \frac{n.\ (n-1)(n-2).\ d3}{2.\ 3}\ (s_{n-3} = u^{n-3}) + \text{и проч.}$$

или $a^n = u^n - n.\ d\ (s_{n-1} - u^{n-1}) - \frac{n.\ (n-1)}{2}.\ d^2\ (s_{n-2} - u^{n-2}) - \frac{n.\ (n-1)(n-2)d_2}{2.\ 3}\ (s_{n-3} - u^{n-3}) \ldots\ldots d^n\ (m-1)$

Откуда происходитъ

$$s_{n-1} = \frac{u^n - a^n + ndu^{n-1} - \frac{n.\ n-1}{2}.\ d^2\ (s_{n-2} - u^{n-2}) - \frac{n.\ n-1.\ n-2\ d3}{2.\ 3.}\ (s_{n-3} - u^{n-3}) \ldots\ d^n\ (m-1)}{nd}$$

370. Изъ сей формулы выведемъ частную, показывающую опредѣлять сумму квадратовъ членовъ ариѳметической прогрессіи. Въ такомъ случаѣ $n-1=2$; слѣдовательно

$$s_2 = \frac{u^3 - a^3 + 3du^2 - 3d^2(s_1 - u) - d^3(m-1)}{3d};$$ гдѣ $u = a + d(m-1)$, и $s_1 = (2a + dm - d)\frac{m}{2}$.

Принаровимъ сію формулу къ натуральнымъ числамъ, въ семъ случаѣ $a=1$, $d=1$, слѣдовательно $u=m$ и $s_1 = \frac{(m+1)}{2}$. И такъ будетъ

$$s_2 = \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{1.\,2.\,3}.$$

Формулу сію можно получить иначе.

Пусть будетъ

$$s_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + (m-1)^2 + m^2$$

и $$s_{\frac{1}{2}} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + (m-1)^2$$

Слѣдовательно $s_2 - s_{\frac{1}{2}} = m^2$.

Теперь пусть будетъ

$s_2 = Am^3 + Bm^2 + Cm + D$, гдѣ коеффиціенты A, B, C, D независимы отъ частныхъ величинъ m.

Также положимъ

$$s_{\frac{1}{2}} = A(m-1)^3 + B(m-1)^2 + C(m-1) + D;$$

Слѣдовательно

$$s_2 - s_{\frac{1}{2}} = 3Am^2 - 3Am + 2Bm + A - B + C = m^2,$$

или $m^2(3A-1) + m(2B-3A) + A - B + C = 0$.

Дабы изобразить условіе, что коеффиціенты A, B, C, D не зависятъ отъ частныхъ величинъ m, то надобно приравнять порознь каждой изъ членовъ предыдущаго уравненія къ нулю, сіе произведетъ 1^e $3A-1=0$, и $A=\frac{1}{3}$; 2^e $2B-3A=0$, и $B=\frac{1}{2}$; 3^e $A-B+C=0$, и $C=\frac{1}{6}$; 4^e $D=0$.

И такъ $s_2=\frac{m^3}{3}+\frac{m^2}{2}+\frac{m}{6}=\frac{m.(m+1)(2m+1)}{1.2.3}$.

371. Сія формула способна къ вычисленію ядеръ, лѣжащихъ въ пирамидальныхъ кучахъ, имѣющихъ квадратное основаніе. Слои кучь сихъ суть квадраты. Числа ядеръ находящихся въ каждомъ слою, составятъ рядъ квадратовъ натуральныхъ чиселъ.

И такъ будетъ въ первомъ слоѣ 1 ядро, во второмъ 4, въ третьемъ 9, въ четвертомъ 16....... въ m^{мъ} = m^2. Слѣдовательно число ядеръ во всѣхъ слояхъ есть сумма квадратовъ натуральныхъ чиселъ. И такъ для изчисленія ядеръ въ пирамидальныхъ квадратныхъ кучахъ, можетъ служить формула $s_2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{1.2.3}$.

Пусть будетъ $m=10$; получимъ $s_2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$.

Помощію формулы $s_2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{1.2.3}$ можетъ быть сочинена таблица для вычисленія ядеръ, лѣжащихъ въ квадратныхъ пирамидальныхъ кучахъ. Числа перваго ряда сей таблицы означаютъ число слоевъ, числа втораго ряда число

ядеръ въ приличномъ слоѣ, а числа третьяго ряда, число ядеръ во всей кучѣ; вотъ она:

Число слоевъ

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12 и проч.

Число ядеръ въ слоѣ

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100. 121. 144 и проч.

Число ядеръ въ кучѣ

1. 5. 14. 30. 55. 91. 140. 204. 285. 385. 506. 650 и проч.

372. Тріугольная пирамидальная куча состоитъ изъ тріугольныхъ слоевъ. Въ первомъ ея слоѣ находится 1 ядро; въ боку втораго 2, въ боку третьяго 3..... въ боку m^{го} = m. Число ядеръ каждаго слоя есть сумма чиселъ ариѳметической прогрессіи, коей первой членъ и разность есть 1; число же членовъ равно числу ядеръ содержащихся въ краю того слоя. И такъ въ m^{мъ} слою будетъ $\frac{m^2+m}{2}$ или $\frac{1}{2}(m^2+m)$ ядеръ. Естьли m будетъ попеременно равнятся 1, 2, 3, 4..... m, то число ядеръ въ слояхъ изобразится чрезъ $\frac{1}{2}(1^2+1)$, $\frac{1}{2}(2^2+2)$, $\frac{1}{2}(3^2+3)$, $\frac{1}{2}(4^2+4)$..... $\frac{1}{2}(m^2+m)$. Изобразивши чрезъ s сумму ядеръ въ кучѣ, будетъ

$$s=\frac{1}{2}(1^2+1)+\frac{1}{2}(2^2+2)+(3^2+3)+\frac{1}{2}(4^2+4)\ldots\ldots \frac{1}{2}(m^2+m)=\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+4^2\ldots m^2)+\frac{1}{2}(1+2+3+4\ldots m)=\frac{m(m+1)(2m+1)}{12}+\frac{m^2+m}{4}=\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}.$$

По сей формулѣ сочинимъ также таблицу для вычисленïя ядеръ въ пирамидальной трïугольной кучѣ; вотъ она:

Число ядеръ въ краю

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10 и проч.

Число ядеръ въ слоѣ

1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36. 45. 55 и проч.

Число ядеръ въ кучѣ

1. 4. 10. 20. 35. 56. 84. 120. 165. 220 и проч

Такимъ образомъ, положа $m=10$, получимъ $s=\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}=220$; если $m=4$, то $s=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{6}=20$.

Въ самомъ дѣлѣ въ первомъ слою будетъ 1 ядро во второмъ $1+2=3$, въ третьемъ $1+2+3=6$, въ четвертомъ $1+2+3+4=10$. Сумма же ядеръ въ сихъ слояхъ вмѣстѣ будетъ $=20$.

373. Продолговатая прямоугольная куча состоитъ изъ параллелограмныхъ слоевъ ядеръ, такъ расположенныхъ, что если считая отъ верху, первой слой содержитъ m ядеръ, то во второмъ будетъ находится 2 ряда по $m+1$ ядеръ въ каждомъ, въ третьемъ 3 ряда по $m+2$ въ каждомъ ядеръ; и такъ далѣе, такъ что въ $n^{\text{мъ}}$ слою будетъ n рядовъ по $m+n-1$ ядеръ въ каждомъ, и слѣдовательно, число ядеръ въ семъ слою равно $n(m+n-1)$.

И такъ число ядеръ

въ $1^{\text{мъ}}$ слою будетъ $m+1^2-1$

въ $2^{\text{мъ}}$ — —— $2m+2^2-2$

въ $3^{\text{мъ}}$ — —— $3m+3^2-3$

въ $4^{\text{мъ}}$ — —— $4m+4^2-4$

. . . .

. . . .

въ $n^{\text{мъ}}$. . . . . $nm+n^2-n$.

Пусть s_2 будетъ сумма слоевъ, то получимъ

$$s_2=m(1+2+3+4\ldots+n)+(1^2+2^2+3^2+4^2\ldots+n^2)-(1+2+3+4\ldots\ldots n)=m.\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\times\left(m+\frac{2n+1}{3}-1\right)=\frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}.$$

Для изчисленïя ядеръ въ сихъ кучахъ надлѣжитъ имѣть нѣсколько таблицъ; когда $m=10$, то годится слѣдующая таблица сочиненная по найденной формулѣ.

Число слоевъ

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10 и проч.

Число ядеръ въ слоѣ

10. 22. 36. 52. 70. 90. 112. 136. 162. 190 и проч.

Чиало ядеръ въ кучѣ

10. 32. 68. 120. 190. 280. 392. 528. 690. 880 и проч.

Такимъ образомъ, когда $m=10$, $n=9$, будетъ $s_2=9.\ 10.\left(\frac{30+18-2}{6}\right)=690$.

ГЛАВА XXVII.

Объ обратномъ способѣ рядовъ.

374. Дано уравненіе $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ и проч.; требуется величина y, изображенная въ x?

Способъ научающій опредѣлять величину y въ x называется *обратнымъ способомъ рядовъ* (méthode inverse des séries ou retour des suites); потому что достигаютъ до величины y чрезъ обращенной рядъ степеней x; чтобъ видѣть въ чемъ состоитъ способъ сей, то для сего рѣшимъ данное уравненіе

$$x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \text{ и проч.} \ldots (1).$$

Положимъ что $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ и проч.

$$\text{то будетъ}\left\{\begin{array}{lrl} y^2 = & A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + & \text{и проч.} \\ & + 2ACx^4 + & \text{и проч.} \\ y^3 = & A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + & \text{и проч.} \\ y^4 = & A^4x^4 + & \text{и проч.} \\ + \text{ и проч.} = & + & \text{и проч.} \end{array}\right.$$

И такъ

$$x = \left\{\begin{array}{lrl} ay = & Aax + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 + & \text{и проч.} \\ by^2 = & bA^2x^2 + 2bABx^3 + bB^2x^4 + & \text{и проч.} \\ & + 2bACx^4 + & \text{и проч.} \\ cy^3 = & cA^3x^3 + 3cA^2Bx^4 + & \text{и проч.} \\ dy^4 = & dA^4x^4 + & \text{и проч.} \\ + \text{ и проч.} & + & \text{и проч.} \end{array}\right.$$

Послѣднее сіе уравненіе даетъ $Aax - x = 0$, или $Aa - 1 = 0$, $A = \frac{1}{a}$. Также $aB + bA^2 = 0$, слѣдовательно $B = -\frac{b}{a^3}$. Потомъ $aC + 2BAb + cA^3 = 0$, откуда $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$; и такъ далѣе. Вставя величины сіи въ уравненіе (1), получимъ

$$y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^3}x^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}x^4 + \text{ и проч.}$$

375. *Данъ рядъ* $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 +$ и проч. *найти* y?

Положимъ $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 +$ и проч.... (2)

то будетъ

$$\begin{array}{lrl} y^3 = & A^3x^3 + 3A^2Bx^5 + 3A^2Cx^7 + & \text{и проч.} \\ & + 3AB^2x^7 + & \text{и проч.} \\ y^5 = & A^5x^5 + 5A^4Bx^7 + & \text{и проч.} \\ y^7 = & A^7x^7 + & \text{и проч.} \\ + \text{ и проч.} & + & \text{и проч.} \end{array}$$

И такъ

$$x = \left\{\begin{array}{lrl} ay = & aAx + aBx^3 + aCx^5 + aDx^7 + & \text{и проч.} \\ by^3 = & bA^3x^3 + 3bA^2Bx^5 + 3bA^2Cx^7 + & \text{и проч.} \\ & + 3bAB^2x^7 + & \text{и проч.} \\ cy^5 = & cA^5x^5 + 5cA^4Bx^7 + & \text{и проч.} \\ dy^7 = & dA^7x^7 + & \text{и проч.} \\ + \text{ и проч.} = & + & \text{и проч.} \end{array}\right.$$

Сіе послѣднее уравненіе даетъ $aAx - x = 0$, и $A = \frac{1}{a}$; $aB + bA^3 = 0$, и $B = -\frac{b}{a^4}$; $aC + 3bA^2B + cA^5 = 0$, и $C = \frac{3b^2 - ac}{a^7}$; $aD + 3bA^2C + 3bAB^2 + 5cA^4B + dA^7 = 0$, и $D = \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}$; и проч.

Вставя величины сіи въ уравненіе (2), получимъ

$$y = \frac{x}{a} - \frac{b^3x^3}{a^4} + \frac{3b^2-ac}{a^7}x^5 + \frac{8abc-a^2d-12b^3}{a^{10}}x^7 + \text{и проч.}$$

376. Пусть будетъ $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 +$ и проч.

Поступая съ уравненіемъ симъ какъ прежде, получимъ $y = x + x^2 + x^3 + x^4 +$ и проч.

377. Равномѣрно рядъ

$$x = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6} + \text{и проч. даетъ}$$

$$y = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{и проч.}$$

378. *Данъ рядъ*

$$x = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{и проч.}$$

найти y?

Поступая такъ какъ въ предыдущихъ членахъ, получимъ

$$y = x - \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7x^9}{2.4.6.8.9} + \text{и проч.}$$

379. Если будетъ $x = a + by + cy^2 +$ и проч. тогда для большей удобности надлѣжитъ a перенесть во вторую часть и раздѣлить обѣ части на b, ибо предположивши $\frac{x-a}{b} = z$, будетъ $z = y + \frac{c}{b}y^2 +$ и проч.; гдѣ надлѣжитъ только опредѣлить y въ z.

ГЛАВА XXVIII.

Объ логариѳмахъ.

380. Пусть будетъ уравненіе $y = a^x$, въ которомъ a и y суть такія перемѣняющіяся количества, что a всегда будучи возведено въ x равнялось бы y. Количество x согласились называть *логариѳмомъ* y, и изображать его $x = L.\,y$; гдѣ буква L означаетъ слово *логариѳмъ*. Количество a называется *осиванiемъ логариѳмовъ*, и въ каждой логариѳмической степени имѣетъ особливую числовую величину.

381. Предположивши $y = 1$, будетъ $x = 0$; когда же $y = a$, то $x = 1$. И такъ *во всякой логариѳмической системѣ логариѳмъ единицы есть нуль, а логариѳмъ основанія единица.*

382. Положивши $a = 10$, и попеременно $y = 10$, 100, 1000, 10000, 100000, и проч. получимъ $x = 1$, 2, 3, 4, 5, и проч. И такъ логариѳмы чиселъ, составляющихъ геометрическую прогрессію $\div\!\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : и проч., изобразятъ ариѳметическую прогрессію натуральныхъ чиселъ : $\div$ 0. 1. 2. 3. 4. 5. и проч. Таковые логариѳмы называются *обыкновенными*, *табличными*, *искуственными*, и наконецъ *Бриггіевыми*, по имени ихъ изобрѣтателя.

383. Пусть будутъ два уравненія $y = a^x$, и $y' = a^{x'}$, изъ коихъ въ первомъ $x = L.\,y$, а во второмъ $x' = L.\,y'$.

1е. Помноживши одно изъ сихъ сравненій на другое получимъ

$$y.\ y^{1} = a^{x+x^{1}}$$
$$\text{и } L\,(y.\ y^{1}) = x + x^{1} = Ly + Ly^{1}\ .$$

И такъ *логариѳмъ произведенія двухъ количествъ равенъ суммѣ логариѳмовъ ихъ.*

2е. Раздѣливши первое уравненіе на второе будетъ

$$\frac{y}{y^{1}} = a^{x-x^{1}}\ ,$$
$$\text{и } L\,\left(\frac{y}{y^{1}}\right) = x - x^{1} = Ly - Ly^{1};$$

то есть: *логариѳмъ частнаго равенъ логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя.*

384. Уравненіе $y = a^{x}$, даетъ 1е. $y^{m} = a^{mx}$, и $L\,(y^{m}) = mx = m\,L.\ y$;

то есть: *логариѳмъ степени какого нибудь количества равенъ логариѳму того количества, помноженному на показателя степени.*

То же уравненіе $y = a^{x}$, даетъ 2е. $\sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{a^{x}} = a^{\frac{x}{m}}$, и $L\sqrt[m]{y} = \frac{x}{m} = \frac{Ly}{m}$;

то есть: *логариѳмъ корня изъ какого нибудь количества равенъ логариѳму того количества, раздѣленному на показателя корня.*

385. И такъ помощію логариѳмовъ умноженіе превращается въ сложеніе, дѣленіе въ вычитаніе, возведеніе степеней въ умноженіе, а извлеченіе корней въ дѣленіе. Вотъ нѣсколько примѣровъ:

1. $Lab = La + Lb.$
2. $L(abcd\ldots) = La + Lb + Lc + Ld + \ldots$
3. $L\,\frac{a}{b} = La - Lb.$
4. $L\,\left(\frac{abc}{de}\right) = La + Lb + Lc - Ld - Le.$
5. $L\,a^{m} = m\,La.$
6. $L\,(a^{m}\,b^{n}\,c^{p}\ldots) = mLa + nLb + pLc + \ldots$
7. $L\,a^{-m} = -\,m\,La.$
8. $L\,a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}La.$
9. $L\,a^{-\frac{m}{n}} = -\,\frac{m}{n}La.$
10. $L\,\frac{ax^{n}}{c^{z}} = La + nLx - zLc.$
11. $L\,\frac{ab+bc}{m+n} = Lb + L(a+c) - L\,(m+n).$
12. $L\,\frac{a+x}{a-x} = L\,(a+x) - L\,(a-x).$
13. $L\sqrt{(x^{2}+y^{2})} = \frac{1}{2}\,L\,(x^{2}+y^{2}).$
14. $L\,(a^{2}-x^{2}) = L\,(a+x) + L\,(a-x).$
15. $L\sqrt{(a^{2}-x^{2})} = \frac{1}{2}\,L\,(a+x) + \frac{1}{2}\,L\,(a-x).$
16. $L\,(z^{3}\sqrt[6]{z^{3}}) = L\,(z^{3}\sqrt{z}) = 3\,Lz + \frac{1}{2}\,Lz = \frac{7}{2}\,Lz.$
17. $L\sqrt[m]{(a^{3}-x^{3})^{n}} = \frac{m}{n}\,L\,(a-x) + \frac{m}{n}\,L\,(a^{2}+ax+x^{2}).$
18. $L\,\frac{\sqrt{(a^{2}-x^{2})}}{(a+x)^{2}} = \frac{1}{2}\,L\,(a^{2}-x^{2}) - 2\,L\,(a+x) = \frac{1}{2}\,L\,(a-x) - \frac{3}{2}\,L\,(a+x).$
19. $L(3a)^{6} = 6\,L\,3a = 6\,L\,3 + 6\,La.$

386. Уравненіе $y = a^{x}$ показываетъ, что 1е если основаніе $a > 1$, то логариѳмы чиселъ больше 1 суть положительные; а чиселъ меньше 1 суть отрицательные. На противъ будетъ если $a < 1$.

387. Пусть будетъ $1+x$ какое нибудь число, и при томъ $(1+x)^m = 1+z$. Положимъ, что $L(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ и проч.; посему $L(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ и проч. Но такъ какъ $(1+x)^m = 1+z$, то $z = mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3 +$ и проч.; и $mL(1+x) = L(1+z)$.

Сіе намъ даетъ $mAx + mBx^2 + mCx^3 + mDx^4 +$ и проч. $= Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ и проч. Вставя во второй членъ уравненія величину z, получимъ

$$\begin{array}{l} mAx + mBx^2 \\ + mCx^3 + mDx^4 = \\ + \text{ и проч.} \end{array} \left\{ \begin{array}{r} mAx + \frac{m.(m-1)}{2}Ax^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)}{2.3}Ax^3 \\ + \text{ и проч.} \\ + m^2Bx^2 + m^2(m-1)Bx^3 + \\ \text{и проч.} \\ + mCx^3 + \text{ и проч.} \end{array} \right.$$

Сравнивши сходственные члены, получимъ 1е. $B = -\frac{1}{2}A$; 2е. $C = \frac{1}{3}A$; 3е. $D = -\frac{1}{4}A$; и такъ далѣе.

Слѣдовательно $L(1+x) = A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 +$ и проч. $)$ . . . . (1).

Такъ какъ въ семъ уравненіи A есть количество неопредѣленное, то заключаю, что числа $1+x$ можемъ имѣть множество различныхъ логариѳмовъ.

Количество A называется *модулемъ* логариѳмовъ. Система логариѳмовъ въ которой $A=1$ названа системою *логариѳмовъ натуральныхъ*. Они же называются *неперовыми*, по имени изобрѣтателя ихъ, и *гиперболическими*, по соотношенію ихъ съ кривою линеею, извѣстною подъ именемъ *равносторонней гиперболы*.

388. И такъ въ системѣ натуральныхъ логариѳмовъ, логариѳмъ какого нибудь числа будетъ изображать слѣдующая формула

$\lambda(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 +$ и проч. . . . . (2). . . . . . (*).

Подобнымъ образомъ будемъ имѣть

$\lambda(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 -$ и проч. . . . . (3).

Вычтя уравненіе (3) изъ (2) получимъ

$\lambda(1+x) - \lambda(1-x) = \lambda(\frac{1+x}{1-x}) = 2x(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{7}x^6 +$ и проч. . . . . (4).

Пусть будетъ $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+d}{n}$; отсюда слѣдуетъ $x = \frac{d}{2n+d}$.

Вставивъ сію величину въ уравненіе (4), и замѣтя что $n+d = n(\frac{n+d}{n})$, а слѣдовательно $\lambda(n+d) = \lambda n + \lambda(\frac{n+d}{n})$, получимъ

$\lambda(n+d) = \lambda n + \frac{2d}{2n+d}\{1 + \frac{1}{3}.\frac{d^2}{(2n+d)^2} + \frac{1}{5}.\frac{d^4}{(2n+d)^4} +$ и проч.$\}$...(5).

Если сдѣлаемъ $d=1$, то уравненіе сіе перемѣнится въ слѣдующее:

$\lambda(n+1) = \lambda n + \frac{2}{2n+1}\{1 + \frac{1}{3}.\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}.\frac{1}{(2n+1)^4} +$ и проч.$\}$...(6).

Помощію сей формулы можно изчислить натуральные логариѳмы всѣхъ чиселъ.

(*) Буквою λ мы будемъ означать натуральные логариѳмы.

389. Положимъ сперва $n=1$, то, замѣтя что во всѣхъ системахъ логариѳмъ единицы равенъ нулю, получимъ.

$$\lambda 2=\frac{2}{3}\left\{1+\frac{1}{3.3^2}+\frac{1}{5.3^4}+\frac{1}{7.3^6}+\frac{1}{9.3^8}+\frac{1}{11.3^{10}}+\text{и проч.}\right\}= 0.69314718.$$

Положивши $n=2$, будетъ

$$\lambda 3=\lambda 2+\frac{2}{5}\left\{1+\frac{1}{3.5^2}+\frac{1}{5.5^4}+\frac{1}{7.5^6}+\frac{1}{9.5^8}+\frac{1}{11.5^{10}}+\text{и проч.}\right\}= 1.09861228.$$

$$\lambda 4=\lambda 2+\lambda 2=2\lambda 2=0.69314718\times 2=1.38629436.$$

Сдѣлавши $n=4$, будетъ

$$\lambda 5=\lambda 4+\frac{2}{9}\left\{1+\frac{1}{3.9^2}+\frac{1}{5.9^4}+\frac{1}{7.9^6}+\frac{1}{9.9^8}+\frac{1}{11.9^{10}}+\text{и проч.}\right\}= 1.60943791.$$

$$\lambda 6=\lambda 2.3=\lambda 2+\lambda 3=1.79175946$$

$$\lambda 7=\lambda 6+\frac{2}{13}\left\{1+\frac{1}{3.13^2}+\frac{1}{5.13^4}+\frac{1}{7.13^6}+\frac{1}{9.13^8}+\text{и проч.}\right\}= 1.94591014.$$

$$\lambda 8=3\lambda 2=2.07944154.$$

$$\lambda 9=2\lambda 3=2.19722457.$$

$$\lambda 10=\lambda 2+\lambda 5=2.30258509.$$

Подобнымъ образомъ получимъ натуральные логариѳмы всѣхъ прочихъ чиселъ.

390. Зная натуральные логариѳмы получимъ логариѳмы прочихъ системъ. Ибо логариѳмъ всякой системы равенъ натуральному логариѳму числа, умноженному на модуль той системы. И такъ сначала опредѣлимъ модуль Бриггіевыхъ логариѳмовъ.

Для сего говорю: табличный логариѳмъ 10 равенъ натуральному логариѳму 10, помноженному на A, то есть $L\,10=A\,\lambda\,10$; или $1= A\times 2.30258509$; отсюда вывожу $A=\frac{1}{2.30258509}= 0.43429448$: такова величина модуля Бриггіевыхъ логариѳмовъ.

Такимъ же способомъ опредѣляется модуль всѣхъ логариѳмическихъ системъ; то есть для сего логариѳмъ основанія b данной системы, которой всегда 1, приравниваетея къ натуральному логариѳму, на примѣръ m, даннаго основанія b, помноженному на искомой модуль A, что составитъ уравненіе $1=Am$: отсюда вывожу $A=\frac{1}{m}$.

391. Чтобъ получить Бриггіевъ логариѳмъ какого нибудь числа, надлежитъ помножить натуральной логариѳмъ того числа на 0.43429448. И наоборотъ, чтобъ превратить табличной логариѳмъ въ Неперовъ должно раздѣлить его на 0.43429448, или помножить на $\frac{1}{0.43429448}= 2.30258509$.

392. И такъ чтобъ сочинить таблицу Бриггіевыхъ логариѳмовъ должно сперва найти натуральные логариѳмы чиселъ, а потомъ перемножить ихъ на 0.43429448.

Такимъ образомъ по Бриггіевой системѣ будетъ:

$L\,1 = 0.$

$L\,2 = (\lambda 2) \times 0.43429448 = 0.30103000.$

$L\,3 = (\lambda 3) \times 0.43429448 = 0.47712125.$

$L\,4 = (\lambda 4) \times 0.43429448 = 2.\,L\,2 = 0.60205978.$

$L\,5 = (\lambda 5) \times 0.43429448 = L\,10 - L\,2 = 0.69897000.$

$L\,6 = (\lambda 6) \times 0.43429448 = L\,3 + L\,2 = 0.77815124.$

$L\,10 = 1.$

$L\,11 = (\lambda 11) \times 0.43429448 = 2.39789527 \times 0.43429448 = 1.04139268.$

$L\,25 = (\lambda 25) \times 0.43429448 = 3.21887582 \times 0.43429448 = 2\,L\,5 = 1.39794000.$

$L\,100 = 2.$

$L\,115 = (\lambda 115) \times 0.43429448 = 4.74493212 \times 0.43429448 = 2.06069784.$

$L\,1000 = 3.$

$L\,1181 = (\lambda 1181) \times 0.43429448 = 7.07411681 \times 0.43429448 = 3.07224989.$

$L\,10000 = 4.$

и проч.

И такъ вообще Бриггїевы логариѳмы чиселъ, заключающихся между 10 и 100, равны 1 съ разными десятичными дробями; логариѳмы чиселъ отъ 100 до 1000, равны 2 съ разными десятичными дробями; и такъ далѣе.

Цѣлое число логариѳма называется *характеристикою*, а дробь *мантиссою*. Такимъ образомъ характеристика 0 чиселъ отъ 1 до 10, 1

отъ 10 до 100, 2 отъ 100 до 1000, 3 отъ 1000 до 10000; и такъ далѣе. Вообще характеристика цѣлаго числа содержитъ столько единицъ, сколько то число цыфръ безъ одной. Такимъ образомъ въ логариѳмѣ числа 12345 характеристика есть 4.

393. Мы видѣли, что логариѳмъ частнаго равенъ логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя; но такъ какъ дробь есть частное число, происходящее отъ раздѣленія числителя на знаменателя; слѣдовательно *логариѳмъ дроби равенъ логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя. Неправильной дроби логариѳмъ будетъ положительной, а правильной отрицательной.* Ибо въ первомъ случаѣ логариѳмъ числителя больше логариѳма знаменателя; а во второмъ напротивъ.

394. Чтобъ получить логариѳмъ смѣшеннаго числа, должно сперва число сїе превратить въ неправильную дробь, а потомъ взять оной логариѳмъ. Такимъ образомъ $L\,(a + \frac{b}{c}) = L\,(\frac{ac+b}{c}) = L\,(ac+b) - Lc.$

395. *Въ пропорціи геометрической* $a : b :: c : x$ *найти помощію логариѳмовъ четвертой членъ?*

Такъ какъ $x = \frac{bc}{a}$, то $Lx = Lb + Lc - La.$

И такъ *логариѳмъ крайняго члена геометрической пропорціи, равенъ суммѣ логариѳмовъ среднихъ членовъ безъ логариѳма даннаго крайняго.*

396. *Въ геометрической пропорціи* $a : b : : x : d$ *найти помощію логариѳмовъ среднїй членъ?*

Такъ какъ пропорція даетъ $x = \frac{ad}{b}$, то будетъ $Lx = La + Ld - Lb$; то есть.

Логариѳмъ средняго члена равенъ суммѣ логариѳмовъ крайнихъ членовъ безъ логариѳма даннаго средняго.

397. *Въ пропорціи* $\div a : x : c$ *найти среднїй членъ* x?

Такъ какъ $x = \sqrt{ab}$, то $Lx = \frac{La + Lb}{2}$.

И такъ въ геометрической непрерывной пропорціи логариѳмъ средняго члена равенъ полсуммѣ логариѳмовъ крайнихъ членовъ.

398. Симъ мы заключаемъ главу нашу объ логариѳмахъ. Что касается до практическихъ дѣйствій надъ логариѳмами, то есть; до опредѣленія логариѳмовъ десятичныхъ дробей, до сыскиванія логариѳмовъ чиселъ, въ таблицахъ логариѳмическихъ ненаходящихся, до нахожденія чиселъ логариѳмовъ въ таблицахъ не находящихся, до превращенія отрицательныхъ логариѳмовъ въ положительные; словомъ, что касается до употребленія логариѳмовъ, то мы ничего не предлогаемъ по причинѣ, что учащїйся все сїе можетъ видѣть при самыхъ логариѳмическихъ таблицахъ. Лучшими логариѳмическими таблицами почитаются по своей обширности и точности Кальета, Деламбра и Вега; а потомъ, немногихъ чиселъ логариѳмы содержащїе, Лаланда.

ГЛАВА XXIX.

О процентномъ правилѣ.

399. Рѣшенія задачь касающихся до изчисленія процентовъ составляетъ предметъ *процентнаго правила.* Проценты обыкновенно опредѣляются по чемъ на 100; въ Россіи указные годовые проценты, на 100 рублей полагается 6 рублей. Мы здѣсь означимъ на 100 число процентовъ буквою p, дабы чрезъ сїе имѣть общія формулы.

400. *Спрашивается во что чрезъ годъ обратится сумма* a?

Для опредѣленія годовыхъ процентовъ на a, посылаю пропорцію

$$100 : p : : a : \frac{ap}{100};$$

то есть: на a въ годъ получится процентовъ $\frac{ap}{100}$, и слѣдовательно сумма a черезъ годъ обратится въ $a + \frac{ap}{100}$, или $a\left(\frac{100+p}{100}\right)$.

401. Если сумма a вмѣстѣ съ процентами оставлена на другой годъ; то, дабы узнать во что она обратится при концѣ втораго года, сперва нахожу проценты на $a\left(\frac{100+p}{100}\right)$, пославши пропорцію:

$$100 : p : : a\left(\frac{100+p}{100}\right) : \frac{ap(100+p)}{100^2}.$$

Теперь, говорю сумма а по прошествїи двухъ лѣтъ обратится въ $a + \frac{a(100+p)}{100} + \frac{ap(100+p)}{100^2}$,

то есть въ $\frac{100\,a(100+p)}{100^2} + \frac{ap(100+p)}{100^2}$,

или въ $a\left(\frac{100+p}{100}\right)^2$.

Поступая такимъ же образомъ, найдемъ что сумма а черезъ три года будетъ $a\left(\frac{100+p}{100}\right)^2$,

черезъ четыре года $a\left(\frac{100+p}{100}\right)^4$,

черезъ пять лѣтъ $a\left(\frac{100+p}{100}\right)^5$,

. . . .

. . . .

Вообще чрезъ n лѣтъ $a\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$;

402. И такъ назвавши x капиталъ или сумму чрезъ n лѣтъ, общая формула для изчисленїя процентовъ будетъ

$x = a\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$, или $Lx = La + nL\,(100+p) - L\,100$).

403. Отсюда получимъ

1. $a = \frac{x}{\left(\frac{100+p}{100}\right)^n}$, или $La = Lx - n(L\,(100+p) - L\,100)$.

2. $p = \frac{100\,(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{}}$, или $L\,(100+p) = \frac{Lx + n\,L\,100 - La}{n}$.

3. $n = \frac{Lx - La}{L\,(100+p) - L\,100}$.

Первая изъ сихъ формулъ опредѣляетъ величину первоначальной суммы, вторая величину процентовъ, а третїя сколько лѣтъ сумма находилась въ процентахъ.

404. *Первоначальная сумма a кромѣ процентовъ ежегодно увеличивается капиталомъ b; спрашивается какая произойдетъ сумма черезъ n лѣтъ?*

Говорю по прошествїи года первоначальная сумма а обратится въ $\left(\frac{100+p}{100}\right)a + b$.

Чтобъ узнать какая она будетъ по прошествїи двухъ лѣтъ, сперва посылаю пропорцїю

$100 : 100 + p :: \left(\frac{100+p}{100}\right)a + b : \left(\frac{100+p}{100}\right)^2 a + \left(\frac{100+p}{100}\right)b$;

Потомъ къ сысканному четвертому члену сей пропорцїи прикладываю b. И такъ по прошествїи двухъ лѣтъ первоначальная сумма обратится въ $\left(\frac{100+p}{100}\right)^2 a + \left(\frac{100+p}{100}\right)b + b$. Подобнымъ образомъ разсуждая найду, что она будетъ по прошествїи трехъ лѣтъ $\left(\frac{100+p}{100}\right)^3 a + \left(\frac{100+p}{100}\right)^2 b + \frac{100+p}{100}\,b + b$; и такъ далѣе.

Если означимъ количество $\frac{100+p}{100}$ буквою c, то ежегодныя обращенїя первоначальной изобразятся слѣдующими рядами:

Черезъ 1 годъ $= ca + b$.

— 2 года $= c^2 a + cb + b$.

— 3 года $= c^3 a + c^2 b + cb + b$

— 4 года $= c^4 a + c^3 b + c^2 b + cb + b$.

. . . .

. . . .

Черезъ n лѣтъ $x = c^n a + c^{n-1} b + c^{n-2} b + c^{n-3} b \ldots + b$.

Уравненїе $x = c^n a + c^{n-b} + c^{n-2} b \ldots + b$, показываетъ, что величина x состоитъ изъ суммы двухъ частей, изъ коихъ первая есть $c^n a$, а вторая есть сумма геометрической прогрессіи; но такъ какъ сей прогрессіи первой членъ есть $c^{n-1} b$, а знаменатель содержанія c, то сумма ея есть $\frac{c^n b - b}{c-1}$. И такъ будетъ

$$x = c^n a + \frac{c^n b - b}{c-1}.$$

405. Если бы первоначальная a сумма вмѣсто того чтобъ ежегодно увеличиваться суммою b, уменьшается оною, то тогда, чтобъ узнать какая будетъ сумма по прошествіи n, должно въ $x = c^n a + \frac{c^n b - b}{c-1}$, вмѣсто $+ b$ вставить $- b$; такимъ образомъ для сего случая мы получимъ

$$x = c^n a + \frac{b - c^n b}{c-1}.$$

406. *Черезъ n лѣтъ должно получить сумму a; спрашивается сколько за нее должно получить въ настоящее время?*

Чрезъ годъ должно бы за 100 получить $100+p$; слѣдовательно на оборотъ вмѣсто $100+p$ въ настоящее время надлѣжитъ получить 100. И такъ, чтобъ узнать сколько должно получить за годъ впередъ вмѣсто a, посылаю пропорцію

$$100+p : 100 :: a : \frac{100a}{100+p}.$$

Чтобъ узнать сколько должно получить впередъ за два года вмѣсто a, посылаю пропорцію

$$100+p : 100 :: \frac{100a}{100+p} : \left(\frac{100}{100+p}\right)^2;$$

Вмѣсто трехъ лѣтъ, говорю

$$100+p : 100 :: \left(\frac{100}{100+p}\right)^2 : \left(\frac{100}{100+p}\right)^3$$

И такъ далѣе.

Слѣдовательдо впередъ за n лѣтъ вмѣсто a должно получить $\left(\frac{100}{100+p}\right)^n a$.

ГЛАВА XXX.

О неопредѣленныхъ вопросахъ.

407. Когда вопросъ содержитъ больше искомыхъ количествъ нежели условій, и слѣдовательно уравненій, тогда онъ называется *не опредѣленнымъ*, и подверженъ многимъ рѣшеніямъ. Такъ на примѣръ вопросъ: *найти два числа, коихъ сумма* 10, подверженъ великому числу рѣшеній; ибо назвавши искомыя количества x и y, вопросъ изобразится уравненіемъ $x+y=10$. Слѣдовательно $x=10-y$: сіе показываетъ, что величина x зависитъ отъ y, которое можетъ имѣть различныя числовыя положительныя, отрицательныя, цѣлыя и дробныя величины. И такъ вопросъ сей подверженъ безчисленному множеству рѣшеній. Но число рѣшеній вопроса сего дѣлается ограниченнымъ, когда за величины x и y примемъ только цѣлыя числа и при томъ

положительныя; въ семъ случаѣ величины x и y будутъ

$$y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$
$$x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Такъ какъ послѣднія четыре рѣшенія ни чемъ не отличны отъ первыхъ четырехъ, то вопросъ имѣетъ только пять рѣшеній. Число рѣшеній многихъ неопредѣленныхъ вопросовъ часто ограничивается, какъ то мы сей часъ увидимъ.

Вопросъ I.

408. *Кусокъ въ 2000 пудовъ перелить на два сорта кусковъ, изъ коихъ одни бы содержали по 9 пудовъ, а другіе по 13 пудовъ?*

Назвавши x число 9 пудовыхъ кусковъ, а y 13 пудовыхъ, вопросъ изобразится уравненіемъ

$$9x + 13y = 2000.$$

Откуда получаю $x = \frac{2000-13y}{9}$.

Но такъ какъ x должно быть цѣлое число, то $2000-13y$ должно дѣлиться безъ остатку на 9; такимъ образомъ будетъ

$$x = 222 - y + \frac{2-4y}{9}$$

и $\frac{2-4y}{9}$ должно быть цѣлое число. И такъ можно положить $\frac{2-4y}{9} = z$. Откуда получаю $2-4y=9z$, и $y = \frac{2-9z}{4} = -2z + \frac{2-z}{4}$; но такъ какъ y должно быть цѣлое число, то и $\frac{2-z}{4}$ должно быть также цѣлое число, и слѣдовательно положить можно $\frac{2-z}{4} = t$; отсюда $2-z=4t$, и $z=2-4t$.

И такъ $y = \frac{2-9z}{4} = \frac{2-18+36t}{4} = -4+9t$.

$$x = \frac{2000-13y}{9} = \frac{2000+52-117t}{9} = 228-13t.$$

Уравненія сіи $y=-4+9t$, $x=228-13t$ показываютъ какія могутъ имѣть величины x и y; такъ какъ количества сіи x и y суть цѣлыя числа, то должно быть $-4+9t>0$ и $228-13t>0$, то есть $t>0$ и $13t<228$, или $t>0$ и $t<18$.

И такъ можетъ быть $t = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots 17$.
Слѣдовательно будетъ $y = 5, 15, 24 \ldots 149$.
$x = 215, 202, 189 \ldots 7$.

И такъ вопросъ подверженъ 17 рѣшеніямъ: если возьмемъ 13 пудовыхъ кусковъ 5, то 9 пудовыхъ будемъ 215; если 13 пудовыхъ кусковъ возьмемъ 14, то 9 пудовыхъ будемъ 202; и такъ далѣе.

Вопросъ II.

409. *Раздѣлить число 117 на двѣ части, изъ коихъ бы одна была умножена на 19, а другая на 7?*

Назвавши части сіи x и y, условіе вопроса изобразится уравненіемъ $19x+7y=117$, которое даетъ $y = \frac{117-19x}{7} = 16-2x + \frac{5-5x}{7} = 16-2x + 5(\frac{1-x}{7})$. Положивши $\frac{1-x}{7} = t$, получаю $x = 1-7t$.

Слѣдовательно $y = 14 + 19t$. Если положимъ, что части x и y должны быть цѣлыя и положительныя числа, то для сего надлѣжитъ быть

$1-7t>0$, и $14+19t>0$, то есть $t<\frac{1}{7}$ и $t>\frac{14}{19}$. И так вопросъ будетъ удовлетворенъ, когда $t=0$, и слѣдовательно $x=1$, а $y=14$. Въ самомъ дѣлѣ будетъ $19x+7y=19+98=117$.

Вопросъ III.

410. *Дробь $\frac{58}{77}$, которой знаменатель 77 есть произведенїе первыхъ чиселъ 11 и 7, разбить на двѣ дроби, изъ коихъ одной знаменатель было бы число 11, а другой число 7.*

Назвавши числителей искомыхъ дробей x и y, будетъ $\frac{x}{11}+\frac{y}{7}=\frac{58}{77}$.

Уравненїе сїе даетъ $7x+11y=58$. Отсюда получаю $x=\frac{58-11y}{7}=8-y+\frac{2-4y}{7}=8-y+2(\frac{1-2y}{7})$. Положивши $\frac{1-2y}{7}=t$, будетъ $2y=1-7t$, $y=\frac{1-7t}{2}=-3t+\frac{1-t}{2}$. Сдѣлавши $\frac{1-t}{2}=u$, будетъ $1-t=2u$, $t=1-2u$. И такъ $y=\frac{1-7t}{2}=7u-3$; $x=\frac{58-11y}{7}=13-11u$. Но такъ какъ x и y должны быть числа цѣлыя и положительныя, то $u=1$. Слѣдовательно будетъ $y=4$, $x=2$, а дробь $\frac{58}{77}=\frac{2}{11}+\frac{4}{7}$.

Подобнымъ образомъ поступая найдемъ, что дробь $\frac{391}{924}$, коей знаменатель $=4.3.7.11$, разлагается на сумму дробей $\frac{1}{4}$ и $\frac{40}{231}$; то есть $\frac{391}{924}=\frac{1}{4}+\frac{40}{231}$; потомъ получимъ $\frac{40}{231}=\frac{2}{3}-\frac{38}{77}=\frac{2}{3}+\frac{39}{77}-1$; наконецъ будемъ имѣть $\frac{39}{77}=\frac{1}{7}+\frac{4}{11}$. И такъ будетъ $\frac{391}{924}=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{7}+\frac{4}{11}-1$.

Вопросъ IV.

411. *Найти три числа, коихъ сумма 20, а сумма утроеннаго перваго съ упятереннымъ вторымъ и съ удвоеннымъ третьимъ составляетъ 71?*

Называю искомыя числа x, y и z. Условїе вопроса изобразится двумя уравненїями:

$$x+y+z=20,$$
$$3x+5y+2z=71.$$

Вывожу изъ перваго уравненїя $x=20-y-z$; вставя во второе уравненїе, имѣю

$$60-3y-3z+5y+2z=71,$$
или $2y-z=11$.

Слѣдовательно $y=\frac{11+z}{2}=5+\frac{1+z}{2}$.

Положивши $\frac{1+z}{2}=t$, будетъ $z=2t-1$.

И такъ $y=5+t$, $x=20-5-t-2t+1=16-3t$.

Разсматривая теперь три уравненїя $z=2t-1$, $y=5+t$, $x=16-3t$ вижу, чтобъ искомыя числа были цѣлыя и положительныя, то t для удовлетворенїя первыхъ двухъ уравненїй можетъ быть всякое цѣлое число, начиная отъ 1; но для удовлетворенїя уравненїя $x=16-3t$ ни какое другое число t быть неможетъ, кромѣ 1, 2, 3, 4, 5.

И такъ если будетъ $t=1, 2, 3, 4, 5$.
то $z=1, 3, 5, 7, 9$.
$y=6, 7, 8, 9, 10$.
$x=13, 10, 7, 4, 1$.

Всѣ сіи величины x, y и z удовлетворяютъ вопросу; ибо $x+y+z = 1+6+13 = 3+7+10 = 5+8+7 = 7+9+4 = 9+10+1 = 20$. Также $3x+5y+2z = 3.13+5.6+2.1 = \ldots = 71$.

Вопросъ V.

412. *Найти три числа, коихъ сумма равна* 10?

Назвавши искомыя числа x, y, z, условіе вопроса изобразится уравненіемъ

$$x+y+z = 10.$$

Отсюда вывожу $x = 10 - y - z = 10 - (y+z)$.

Если числа x, y, z могутъ быть какъ цѣлыя такъ и дробныя, и притомъ какъ положительныя такъ и отрицательныя; то рѣшеніе вопроса будетъ удовлетворяемо безчисленнымъ множествомъ чиселъ. Но когда x, y и z должны быть цѣлыя и притомъ положительныя числа; тогда хотя вопросъ будетъ подлежать нѣсколькимъ рѣшеніямъ, однакожъ число сихъ рѣшеній будетъ ограничено. Въ семъ случаѣ $y+z$ должно быть менѣе 10 и неменѣе 2. И такъ мы можемъ принять $y+z = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, что даетъ нѣсколько различныхъ величинъ для y и z; величины же x будутъ $10-2$, $10-3$, $10-4$, $10-5$, $10-6$, $10-7$, $10-8$, $10-9$, то есть 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

ГЛАВА XXXI.

О формулахъ $(x+a)^m$, $(x+a)^{\frac{m}{n}}$ и $(x+a)^{-m}$.

413. Хотя мы уже видѣли выше формулы для возведенія количествъ въ степень всякимъ числомъ означенную; но попричинѣ ясности, точности и важности способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, мы помощію онаго покажемъ новой выводъ симъ формуламъ, то есть $(x+a)^m$, $(x+a)^{\frac{m}{n}}$ и $(x+a)^{-m}$.

Раскрыть въ рядъ $(x+a)^m$?

Такъ какъ $x+a = x(1+\frac{a}{x})$, то $(x+a)^m = x^m(1+\frac{a}{x})^m$; сдѣлавши же $\frac{a}{x} = y$, будетъ $(1+\frac{a}{x})^m = (1+y)^m$.

Положимъ, что

$$(1+y)^m = 1 + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{и проч.}$$

гдѣ величина коэффиціентовъ B, C, D, E и проч. зависитъ не отъ y, но отъ m.

Положимъ также

$$(1+z)^m = 1 + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{и проч.}$$

гдѣ такъ же величина коэффиціентовъ зависитъ отъ m. Вычтя второе уравненіе изъ перваго, будемъ имѣть

$$(1+y)^m - (1+z)^m = B(y-z) + C(y^2-z^2) + D(y^3-z^3) + E(y^4-z^4) + \text{и проч.}$$

Раздѣливши обѣ части уравненія сего на $y-z$, получимъ

$$\frac{(1+y)^m-(1+z)^m}{y-z} = B + C(y+z) + D(y^2+yz+z^2) + E(y^3+y^2z+yz^2+z^3) + \text{и проч.}$$

Положивши $1+y=u$, $1+z=v$; будетъ

$(1+y)^m=u^m$, $(1+z)^m=v^m$, $u-v=y-z$,

$$\frac{(1+y)^m-(1+z)^m}{y-z}=\frac{u^m-v^m}{u-v}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{u^m-v^m}{u-v} = B + C(y+z)+D(y^2+yz+z^2)+E(y^3+y^2z+yz^2+z^3)+\text{и проч.}$$

Но, раздѣливши u^m-v^m на $u-v$, имѣемъ

$$\frac{u^m-v^m}{u-v}=u^{m-1}+u^{m-2}v+u^{m-3}v^2+u^{m-4}v^3\ldots+v^{m-1}.$$

И такъ

$$u^{m-1}+u^{m-2}v+u^{m-3}v^2+u^{m-4}v^3\ldots\ldots+v^{m-1}= B+C(y+z)+D(y^2+yz+z^2)+E(y^3+y^2z+yz^2+z^3)+\text{и проч.}$$

Положивши $y=z$, будетъ $u=v$, и уравненіе наше превратится въ слѣдующее

$$mv^{m-1}=B+2Cy+3Dy^2+4Ey^3+\text{и проч.}$$

или $m(1+y)^{m-1}=B+2Cy+3Dy^2+4Ey^3+$ и проч.

Помноживши уравненіе сіе на $1+y$, получимъ

$$m(1+y)^m = B+(B+2C)y+(2C+3D)y^2+(3D+4E)y^3+\text{и проч.}$$

или, вставя вмѣсто $(1+y)^m$ величину $1+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+$ и проч. будетъ

$$m(1+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+\text{и проч.})= B+(B+2C)y+(2C+3D)y^2+(3D+4E)y^3+\text{и проч.}$$

Теперь сравнивши порознь коеффиціенты сходственныхъ членовъ обѣихъ частей сего уравненія, будемъ имѣть

$B=m=\frac{m}{1}$.

$mB=B+2C$; слѣдоват. $C=\frac{B(m-1)}{2}=\frac{m(m-1)}{1.2}$.

$mC=2C+3D$; слѣд. $D=\frac{C(m-2)}{3}=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$.

$mD=3D+4E$; слѣд. $E=\frac{D(m-1)}{4}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$.

и такъ далѣе.

Вставя величины сіи количествъ B, C, D и проч. въ уравненіе $(1+y)^m=1+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+$ и проч., получимъ

$$(1+y)^m=1+\frac{m}{1}y+\frac{m(m-1)}{1.2}y^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}y^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}y^4+\text{и проч.}$$

Въ уравненіе сіе, вставя $\frac{a}{x}$ вмѣсто y, будемъ имѣть

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^m=\frac{(x+a)^m}{x^m}=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{a^2}{x^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{a^3}{x^3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{a^4}{x^4}+\text{и проч.}$$

И такъ, помножа члены уравненія сего на x^m, будетъ

$$(x+a)^m + x^m+\frac{m}{1}\cdot ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^4x^{m-4}+\text{и проч.}$$

414. *Раскрыть въ рядъ* $(x+a)^{\frac{m}{n}}$?

Такъ какъ $x+a = x(1+\frac{a}{x})$, то $(x+a)^{\frac{m}{n}} =$
$$x^{\frac{m}{n}}(1+\tfrac{a}{x})^{\frac{m}{n}};$$
сдѣлавши же $\frac{a}{x} = y$, будетъ $(1+\frac{a}{x})^{\frac{m}{n}} = (1+y)^{\frac{m}{n}}$.

Положимъ, что
$$(1+y)^{\frac{m}{n}} = 1 + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{и проч.}$$

Такъ же
$$(1+z)^{\frac{m}{n}} = 1 + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{и проч.}$$

Вычтя второе уравненіе изъ перваго, получимъ
$$(1+y)^{\frac{m}{n}} - (1+z)^{\frac{m}{n}} = B(y-z) + C(y^2-z^2) + D(y^3-z^3) + E(y^4-z^4) + \text{и проч.}$$

Слѣдовательно
$$\frac{(1+y)^{\frac{m}{n}} - (1+z)^{\frac{m}{n}}}{y-z} = B + C(y+z) + D(y^2+yz+z^2) + E(y^3+y^2z+yz^2+z^3) + \text{и проч.}$$

Положимъ $1+y=u$, $1+z=v$; то будетъ
$$(1+y)^{\frac{m}{n}} = u^{\frac{m}{n}},\ (1+z)^{\frac{m}{n}} = v^{\frac{m}{n}},\ y-z=u-v.$$

И такъ будемъ имѣть
$$\frac{u^{\frac{m}{n}} - v^{\frac{m}{n}}}{u-v} = B + C(y+z) + D(y^2+yz+z^2) + E(y^3+y^2z+yz^2+z^3) + \text{и проч.}$$

Сдѣлаемъ $u = r^n$, $v = s^n$; то будетъ
$$\frac{u^{\frac{m}{n}} - v^{\frac{m}{n}}}{u-v} = \frac{r^m - s^m}{r^n - s^n} = \frac{r^m - s^m}{r^n - s^n} : \frac{r-s}{r-s} =$$
$$\frac{r^{m-1} + r^{m-2}s + r^{m-3}s^2 \ldots\ldots + s^{m-1}}{r^{n-1} + r^{n-2}s + r^{n-3}s^2 \ldots\ldots + s^{n-1}}.$$

Слѣдовательно
$$\frac{r^{m-1} + r^{m-2}s + r^{m-3}s^2 \ldots\ldots s^{m-1}}{r^{n-1} + r^{n-2}s + r^{n-3}s^2 \ldots\ldots s^{n-1}} =$$
$$B + C(y+z) + D(y^2+yz+z^2) + E(y^3+y^2z+yz^2+z^3) + \text{и проч.}$$

Положимъ теперь $r=s$, то будетъ $u=v$, $y=z$; уравненіе же наше превратится въ слѣдующее
$$\frac{m}{n}\cdot\frac{r^{m-1}}{r^{n-1}} = \frac{m}{n}\cdot u^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n}(1+y)^{\frac{m}{n}-1} =$$
$$B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \text{и проч.}$$

Помноживши обѣ части на $1+y$, будетъ
$$\tfrac{m}{n}(1+y)^{\frac{m}{n}} = B + (B+2C)y + (2C+3D)y^2 + (3D+4E)y^3 + \text{и проч.}$$

Вставя $1+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4$ и проч.

вмѣсто $(1+y)^{\frac{m}{n}}$, получимъ
$$\tfrac{m}{n}(1 + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{и проч.}) =$$
$$B + (B+2C)y + (2C+3D)y^2 + (3D+4E)y^3 + \text{и проч.}$$

Сравнивши сходственные члены обѣихъ частей уравненія сего, будемъ имѣть

$B = \frac{m}{n}$.

$\frac{Bm}{n} = B + 2C$; слѣд. $C = \frac{B\left(\frac{m}{n} - 1\right)}{2} = \frac{m(m-1)}{n.\ 2n}$.

$\frac{Cm}{n} = 2C + 3D$; слѣд. $D = \frac{C\left(\frac{m}{n} - 1\right)}{3} = \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.\ 2n.\ 3n}$.

$\frac{Dm}{n} = 3D + 4E$; слѣд. $E = \frac{D\left(\frac{m}{n} - 1\right)}{4} = \frac{m(m-n)(m-2n)(m-3n)}{n.\ 2n.\ 3n.\ 4n}$.

и такъ далѣе.

Слѣдовательно

$$(1+y)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}\,y + \frac{m(m-n)}{n.\ 2n}.\,y^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.\ 2n.\ 3n}\,y^3 + \frac{m(m-n)(m-2n)(m-3n)}{n.\ 2n.\ 3n.\ 4n}.\,y^4 + \text{и проч.}$$

По причинѣ, что $y = \frac{a}{x}$, будетъ $1+y = 1 + \frac{a}{x} = \frac{x+a}{x}$. И такъ

$$\left(\frac{x+a}{x}\right)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}.\,\frac{a}{x} + \frac{m(m-n)}{n.\ 2n}.\,\frac{a^2}{x^2} + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.\ 2n.\ 3n}.\,\frac{a^3}{x^3} + \frac{m(m-n)(m-2n)(m-3n)}{n.\ 2n.\ 3n.\ 4n}.\,\frac{a^4}{x^4} + \text{и проч.}$$

Слѣдовательно, помножа обѣ части на $x^{\frac{m}{n}}$, получимъ

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}.\,a x^{\frac{m}{n}-1} + \frac{m(m-n)}{n.\ 2n}.\,a^2 x^{\frac{m}{n}-2} + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.\ 2n.\ 3n}.\,a^3 x^{\frac{m}{n}-3} + \frac{m(m-n)(m-2n)(m-3n)}{n.\ 2n.\ 3n.\ 4n}.\,a^4 x^{\frac{m}{n}-4} + \text{и проч.}$$

415. *Раскрыть въ рядъ* $(x+a)^{-m}$?

Такъ какъ $x + a = x\left(1 + \frac{a}{x}\right)$, то $(x+a)^{-m} = x^{-m}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{-m}$; сдѣлавши же $\frac{a}{x} = y$, будетъ $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{-m} = (1+y)^{-m}$.

Положимъ

$$(1+y)^{-m} = 1 + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{и проч.}$$

Также сдѣлаемъ

$$(1+z)^{-m} = 1 + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{и проч.}$$

Вычтя сперва второе уравненіе изъ перваго; и потомъ раздѣливши обѣ части на $y-z$, получимъ

$$\frac{(1+y)^{-m} - (1+z)^{-m}}{y-z} = B + C(y+z) + D(y^2+yz+z^2) + E(y^3+y^2z+yz^2+z^3) + \text{и проч.}$$

Положимъ, что $1+y = u$, $1+z = v$; то будетъ $y - z = u - v$, $\frac{(1+y)^{-m} - (1+z)^{-m}}{y-z} = \frac{u^{-m} - v^{-m}}{u-v}$;

но $\frac{u^{-m} - v^{-m}}{u-v} = \frac{u^{-m} - v^{-m}}{u-v} \times \frac{u^m v^m}{u^m v^m} = \frac{v^m - u^m}{u^m v^m (u-v)} = -\frac{1}{u^m v^m} \times \frac{u^m - v^m}{u-v} =$

$$-\frac{1}{u^m v^m}\left(u^{m-1} + u^{m-2} v + u^{m-3} v + u^{m-4} v^3 + \text{и проч.}\right)$$

И такъ

$$-\frac{1}{u^m v^m}\left(u^{m-1} + u^{m-2} v + u^{m-3} v^2 + u^{m-4} v^3 + \text{и проч.}\right) =$$

$$B + C(y+z) + D(y^2+yz+z^2) + E(y^3+y^2z+yz^2+z^3) + \text{и проч.}$$

Сдѣлавши $y=z$, будетъ $u=v$; и наконецъ вставивши $1+y$ вмѣсто u, получимъ

$$-m(1+y)^{-m-1} = B + 2C + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \text{и проч.}$$

Помноживши сперва обѣ части на $1+y$, и вставя потомъ вмѣсто $(1+y)^{-m}$ величину его $1 + By + Cy^2 + Dy^3 - Ey^4 +$ и проч. будемъ имѣть

$$-m(1 + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{и проч.}) =$$
$$B + (B+2C)y + (2C+3D)y^2 + (3D+4E)y^3 + \text{и проч.}$$

Сравнивши сходственные члены обѣихъ частей уравненія, получимъ

$B = -m = -\frac{m}{1}$.

$-Bm = B+2C$; слѣд. $C = \frac{-B(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)}{1.\,2}$.

$-Cm = 2C+3D$; слѣд. $D = \frac{-C(m+2)}{3} = -\frac{m(m+1)(m+2)}{1.\,2.\,3}$.

$-Dm = 3D+4E$; слѣд. $E = \frac{D(m+3)}{4} = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.\,2.\,3.\,4}$.

и такъ далѣе.

Слѣдовательно

$$(1+y)^{-m} = 1 - \frac{m}{1}.\,y + \frac{m(m+1)}{1.\,2}.\,y^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\,2.\,3}.\,y^3 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.\,2.\,3.\,4}.\,y^4 - \text{и проч.}$$

Вставя $\frac{a}{x}$ вмѣсто y, получимъ

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-m} = 1 - \frac{m}{1}.\,\frac{a}{x} + \frac{m(m+1)}{1.\,2}.\,\frac{a^2}{x^2} - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\,2.\,3}.\,\frac{a^3}{x^3} + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.\,2.\,3.\,4}.\,\frac{a^4}{x^4} - \text{и проч.}$$

И такъ, помножа обѣ части на x^{-m}, будемъ имѣть

$$x^{-m}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-m} \text{ или } (x+a)^{-m} = x^{-m} - \frac{m}{1}.\,ax^{-m-1} + \frac{m(m+1)}{1.\,2}.\,a^2x^{-m-2} - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\,2.\,3}.\,a^3x^{-m-3} + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.\,2.\,3.\,4}.\,a^4x^{-m-4} - \text{и проч.}$$

КОНЕЦЪ.

ОГЛАВЛЕНІЕ

ЧАСТЬ I.

ЧАСТЬ II.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПОГРѢШНОСТИ.

ЧАСТЬ I.

Стр.	Ст.	Напечатано.	Читай.
6	8	$\times = \frac{(a-(2b-c)e}{2(e+d)}$	$x = \frac{[a-(2b-c)]e}{2(e+d)}$
14	20	$\frac{5a^m}{2a} = 2a^{m-1}$	$\frac{4a^m}{2a} = 2a^{m-1}$
14	25	$\frac{-4a3\ bc}{-5a^2\ b3}$	$\frac{-4a3b4c}{-5a^2b3}$
23	1	$a^3 + b^2$	$a^3 + b^3$
63	14	$4a^2 + 12ab$	$4a^2 - 12ab$
70	24	драть 951	драть 95
71	21	95г	951
79	2	$3a + 2b + o$	$3a + 2b + c$
79	3	$17a^3$	$-27a^3$
82	27	$\frac{aegil + begil - befil}{begil}$	$\frac{aegilx + begil - befil}{begil}$
91	16	$x = \frac{160 + 6y - 7y}{5}$,	$x = \frac{160 + 6y - 7z}{5}$
92	4	$z = \frac{1800}{200} = 9$	$z = \frac{1800}{180} = 10.$
92	5	$y = \ldots\ldots = 18$	$y = \ldots\ldots = 20.$
92	6	$x = \ldots\ldots = 35$	$x = \ldots\ldots = 30.$
114	5	$10x - 5y + 4z = 75$	$10x + 5y + 4z = 75$
120	22	$c < a$,	$c > a$,

ЧАСТЬ II.

Стр.	Ст.	Напечатано.	Читай.
8	2	$\sqrt{b} = x$,	$\sqrt[m]{b} = x$,
8	5	$\sqrt{a^p} = x$,	$\sqrt[m]{a^p} = x$,
9	8	$\sqrt[n]{a^r} \times$	$\sqrt[m]{a^r} \times$
9	17	$\sqrt[m]{a^{pn} b^{qm}}$	$\sqrt[m]{a^{pn} b^{qn}}$
30	20	число n соединенїй	число $n-1$ соединенїй.
30	21	$n(н-1)$	$n(n-1)$
43	3	$2b = e$	$2b^3 = e$,
56	22	$x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$	$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$
56	23	$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$,	$x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$.
56	24	$x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.	$x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$.
59	16	$x^2 - 1 = 2$;	$x^2 - 2 = 1$;
64	2	$x^2 + x$	$x^2 - x$
64	3	$x^2 + x + \frac{1}{4}$	$x^2 - x + \frac{1}{4}$
64	4	$x + \frac{1}{2}$	$x - \frac{1}{2}$
72	16	$x^2+y^2=5^2+2^2=2^2+5^2=133$.	$x^3+y^3=5^3+2^3=2^3+5^3=133$.
74	28	$x^4-9x^3+23x^2-20x+15+0$?	$x^4-19x^3+25x^2-20x+15=0$?
84	29	$\frac{a}{q^6} : \frac{a}{q^7}$:	$\frac{a}{q^{[illegible]}} : \frac{a}{q^{[illegible]}}$:
88	18	$a^2 + 2ax + x^2$,	$a^2 + 2ax - x^2$,
102	8	$\left(\begin{smallmatrix} su = {}^{n-3} \\ n-5 \end{smallmatrix}\right)$	$(s_{n-3} - u^{n-3})$
102	9	$\frac{n.(n-1)(n-2)d^2}{2\ 3}$	$\frac{n(n-1)(n-2)d^3}{2.3}$
105	26	$\frac{1}{2}(2^2+2)+(3^2+3)$	$\frac{1}{2}(2^2+2)+\frac{1}{2}(3^2+3)$
111	4	а и у суть	x и y суть
111	9	осиванїемъ	основанїемъ
111	10	степени	системѣ
113	17	$L\sqrt[m]{(a^3 - x)^n} =$	$L\sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} =$
123	25	$c^{n-b} +$	$c^{n-1} b +$